This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

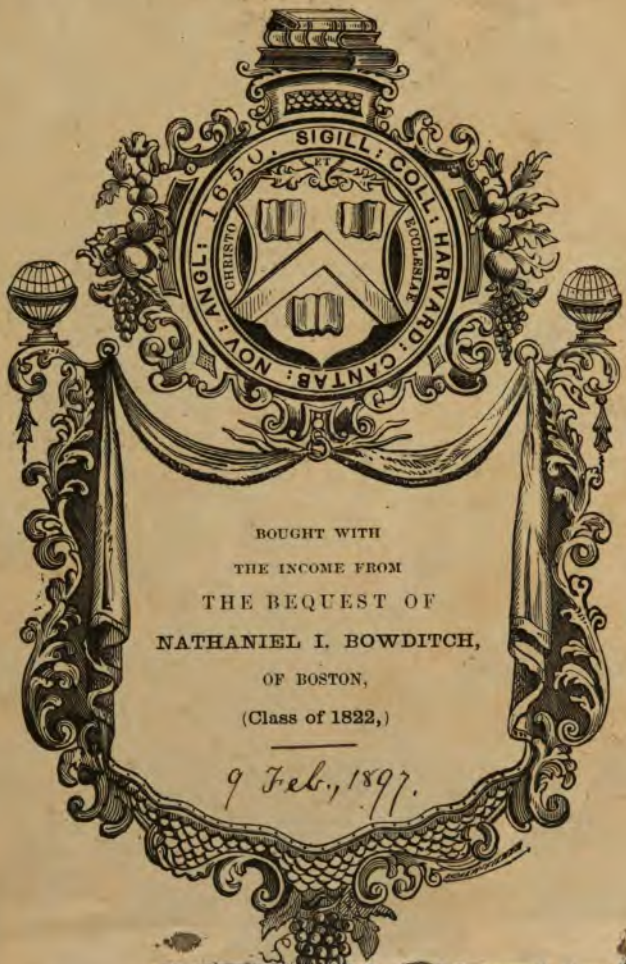
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 388.93



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

9 Feb., 1897.

SCIENCE CENTER LIBRARY

RECUEIL

DE

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

CLASSÉS PAR DIVISIONS SCIENTIFIQUES

CONTENANT

LES ÉNONCÉS, AVEC RENVOI AUX SOLUTIONS, DE TOUS LES PROBLÈMES POSÉS DEPUIS L'ORIGINE DANS DIVERS JOURNAUX :

Nouvelles Annales de Mathématiques,
Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales,
Nouvelle Correspondance mathématique, Mathesis.

DIVISION DE L'OUVRAGE.

A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

I. — Arithmétique. — Algèbre élémentaire. — Trigonométrie.

II. — Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive.

A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

III. — Algèbre. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions (et Géométrie supérieure).

V. — Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure).

VI. — Géométrie du triangle.

A l'usage des candidats à la Licence.

VII. — Calcul infinitésimal et Calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

III

ALGÈBRE

THÉORIE DES NOMBRES.

PROBABILITÉS. GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

A L'USAGE DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès sciences,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

~~VI. 8101~~
Math 388.93

HARVARD COLLEGE
FEB 9 1897
LIBRARY.

Bowditch fund

AVERTISSEMENT.

Les Questions dont on trouvera les énoncés dans cet Ouvrage sont extraites des principaux recueils mathématiques périodiques publiés en langue française depuis la création des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* c'est-à-dire depuis 1842. Je n'ai eu d'autre mérite que d'en faire une classification, mais je crois par ce travail de patience avoir rendu un service réel aux professeurs et aux élèves. Ces problèmes représentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des Géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure. Et cependant, épars dans des collections dont quelques-unes sont rares aujourd'hui, ils étaient devenus presque introuvables, surtout pour les élèves.

Autant que possible, j'ai cité les noms des auteurs des questions, et aussi le recueil auquel chacune d'elles est empruntée. En outre, j'ai indiqué les solutions publiées par un système de renvois abréviatifs, afin de permettre, en cherchant dans les collections des bibliothèques, de retrouver une solution qu'on désirerait étudier. On verra ci-dessous l'explication de ces renvois.

Lorsque plusieurs solutions ont été publiées et qu'elles sont également bonnes, le nom indiqué est généralement celui de l'auteur de la première solution.

Quand une question a été généralisée, l'énoncé qu'on trouvera est habituellement celui qui résulte de la généralisation.

Quelquefois une note indiquera simplement que la question a été généralisée.

Malgré tout le soin et l'attention que j'ai mis à contrôler et à vérifier la correspondance entre les énoncés et les solutions, quelques erreurs ou quelques doubles emplois ont pu néanmoins subsister. Je m'en excuse d'avance et j'accueillerai avec reconnaissance les rectifications qui me seraient adressées à ce sujet.

Les questions dépourvues d'indications de solutions n'ont pas été résolues, ou du moins je n'en ai pas trouvé de solutions dans les différents recueils où j'ai fait d'attentives recherches. Parmi ces Exercices, il en est un certain nombre dont la difficulté semble expliquer l'absence de solution; nous en avons fait précéder l'énoncé d'un astérisque. Nous avons également marqué d'un astérisque les questions non résolues qui, sans être très difficiles, paraissent présenter un intérêt particulier et méritent de nouvelles recherches.

Je tiens à remercier publiquement ici mon excellent ami, le Commandant Brocard, pour ses conseils précieux et son concours personnel, en vue de la publication de ce Recueil.

C.-A. Laisant.

Nota. — Pour toutes les questions non résolues, je recevrai les solutions que les lecteurs croiraient devoir m'adresser (à la librairie Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris), et je me ferai un plaisir de les transmettre aux divers journaux pouvant les insérer.

Les solutions des questions provenant du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* prendront naturellement place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* ou le *Journal de Mathématiques spéciales,* suivant leur nature. Celles provenant de la *Nouvelle Correspondance mathématique* seront accueillies par la rédaction de *Mathesis.*

ABRÉVIATIONS ET RENVOIS.

N. A. — *Nouvelles Annales de Mathématiques* (depuis 1842, fondation).

N. C. — *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan. (Collection complète en 6 volumes; 1875-80.)

J. M. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget. (Collection complète en 5 volumes; 1877-1881.)

J. E. — *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

J. S. — *Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

M. — *Mathesis* (depuis 1881, fondation) (1).

L'indication qui suit immédiatement un énoncé comprend le nom de l'auteur en PETITES CAPITALES, le titre du Recueil auquel l'énoncé est emprunté, et le numéro de cette question dans le Recueil. Par exemple,

(CHASLES, N. A., 83)

signifie que la question a été posée par Chasles et qu'elle occupe le n° 83 dans les *Nouvelles Annales*. S'il n'y a pas de nom d'auteur, c'est que celui-ci est resté inconnu, ou que les rédacteurs en ont pris le patronage. L'indication des solutions se trouve au-dessous de l'énoncé et vers la gauche; elle comprend le nom de l'auteur (ou des auteurs) d'une au moins des solutions, en *italiques*, le millésime (réduit aux deux derniers chiffres) de l'année de la publication du

(1) En fait, le journal *Mathesis*, dirigé par MM. Mansion et Neuberg, a recueilli et continué la tradition scientifique de la N. C.

tome, en *caractères gras,* et le numéro de la page où l'on peut retrouver la solution. Par exemple, l'indication

(*Jamet,* **78**, 296),

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* signifie que la solution en a été publiée par M. Jamet dans l'année 1878 du même Recueil, à la page 296.

S'il arrive exceptionnellement qu'une question extraite d'un Recueil ait été résolue dans un autre, l'indication le fera également connaître. Ainsi

(*Brocard,* M., **82**, 248),

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* signifie que la solution en a été publiée par M. Brocard dans *Mathesis,* année 1882, p. 248.

Si plusieurs solutions ont été publiées, les renvois le feront connaître; mais on n'indiquera généralement que les noms d'un ou de deux auteurs des solutions.

OBSERVATION SPÉCIALE AU PRÉSENT VOLUME.

Les questions d'Algèbre qui figurent ici sont celles qui rentrent dans les programmes actuels de la classe de Mathématiques spéciales. On y a laissé, par conséquent, tous les exercices se rapportant aux notions les plus élémentaires de Calcul infinitésimal. Quelques problèmes pouvant être résolus à la rigueur par l'Algèbre la plus élémentaire y ont été introduits, à cause de leur difficulté relative, qui n'avait pas permis de les placer dans le Volume d'Algèbre élémentaire. D'un autre côté, nous avons dû placer ici les questions d'Algèbre supérieure qui excèdent un peu les limites du programme de Mathématiques spéciales, mais qui ne concernent pas le Calcul infinitésimal. Elles sont d'ailleurs en petit nombre.

La Théorie des nombres ne figure malheureusement aujourd'hui dans aucun des programmes de notre Enseignement. Les exercices qu'on trouvera ici, et qui touchent à cette branche si importante de la Science mathématique, sont de difficulté très diverse. Les uns confinent presque à l'Arithmétique élémentaire, d'autres sont pour ainsi dire inabordables dans l'état présent de la Science. Cependant, la majorité de ces questions constituent d'excellents exercices de calcul algébrique et seront très utiles à de bons élèves de Mathématiques spéciales, en leur ouvrant quelques aperçus nouveaux d'une grande importance.

Les Recueils que nous avons dépouillés contiennent seulement un petit nombre de questions de probabilités. Elles seront étudiées pour la plupart avec intérêt par les élèves,

car plusieurs d'entre elles n'exigent que des notions ordinaires d'Algèbre pour être abordées.

Enfin, nous avons cru devoir grouper à part les exercices concernant cette branche si originale et si intéressante de l'Analyse combinatoire connue sous le nom de *Géométrie de situation,* et dont il semble qu'on doive faire remonter l'origine à Euler.

La classification, dans ce Volume comme dans les autres du même Recueil, a été établie exclusivement en vue de faciliter les recherches. Nous croyons qu'à l'aide de la Table des matières on arrivera sans aucune peine à retrouver un énoncé déterminé.

NOTA. — Les énoncés que contient ce Volume ont été relevés jusqu'au mois de *juin* 1894 *inclusivement,* dans les divers Recueils périodiques.

ERRATA.

Page.	Ligne.	*Au lieu de*	*Lisez :*
97	15	$f(x_3)$	$f'(x_3)$

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

ALGÈBRE
THÉORIE DES NOMBRES
PROBABILITÉS. GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

ALGÈBRE.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

Fractions continues.

1. P étant la limite de la fraction continue

$$a : a + b : b + c : c + d : d + \ldots$$

et Q la limite de la fraction continue

$$a : b + b : c + c : d + \ldots,$$

on a

$$P(a + Q + 1) = a + Q. \quad \text{(N. A., 185.)}$$

(*Murent*, **48**, 300.)

2. Soit la fraction continue

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2c + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}.$$

Faisons

$$a + \frac{1}{b} = \mathrm{M}, \qquad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \mathrm{N},$$

on a

$$\mathrm{MN} = n. \quad [\text{N. A., 573 (}^1\text{).}]$$

3. On sait que, si a_1 est une valeur approchée de $\sqrt{n}$,

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right),$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{n}{a_2}\right),$$
$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{n}{a_3}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

seront des valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{n}$ (²).

On sait aussi que

$$\sqrt{a_1^2 + r} = a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

Or M. *Wœpcke* a démontré (³) que, si, dans le second membre de cette équation, on s'arrête au troisième quotient incomplet, on aura a_2.

On demande à quels quotients incomplets il faudra s'arrêter dans le second membre de cette même équation pour avoir

$$a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \ldots,$$

ou bien de quelle manière on peut démontrer que les valeurs

$$a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \ldots$$

(¹) Énoncé inexact. Nous le maintenons à cause des intéressantes remarques présentées à ce sujet par M. Mister (**72**, 522).

(²) JOSEPH BERTRAND, *Traité d'Arithmétique*, p. 245 et suivantes. 4ᵉ édition. Paris, 1867

(³) *Journal asiatique*, 5ᵉ série, tome IV, page 384; Paris, 1854. *Recherches sur l'Histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux*, etc., par M. Wœpcke, p. 37. Paris, 1855. (*Notes de l'auteur.*)

ne sont pas comprises dans l'expression

$$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \ldots}}$$

(B. Boncompagni, N. A., **1111**.)

(*Moret-Blanc*, **73**, 477.)

4. Trouver le nombre fractionnaire de dénominateur le plus petit, compris entre deux nombres incommensurables donnés différant de moins d'une unité.

Exemple. — Le nombre fractionnaire de dénominateur le plus petit compris entre la racine carrée et la racine cubique de 2 est $\frac{4}{3}$. La solution générale du problème dépend de la théorie des fractions continues. (Beltrami, M., **118**.)

(*Neuberg*, **85**, 12.)

5. Démontrer que les $n^{\text{ièmes}}$ réduites des fractions continues

$$(2, 2, 2, \ldots), \quad (2, -2, -2, \ldots)$$

ont pour valeurs respectives

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n}}, \quad \frac{n+1}{n}.$$

(Hammond, M., **475**.)

(*Collin*, **87**, 163.)

Imaginaires.

6. Déduire des propriétés du triangle rectangle que le module de la somme de deux types imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux types, et plus grand que leur différence. Le type imaginaire est représenté, comme on sait, par $a + b\sqrt{-1}$, et son module par $\sqrt{a^2 + b^2}$, pris positivement.

(N. A., **23**.)

(*Merlieux*, **42**, 360.)

7. Si $\operatorname{tang} a = \pm\sqrt{-1}$, on aura aussi $\operatorname{tang}(a+b) = \pm\sqrt{-1}$, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de b.

(N. A., **158**.)

(*Moutier*, **47**, 365; N. C., **76**, 274, 369; **77**, 112.)

8. Si

$$i = \sqrt{-1}$$

et

$$A + iB = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)(\alpha_3 + 2\beta_3)\ldots,$$

le nombre des facteurs étant arbitraire, on a

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{B}{A} = \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta_2}{\alpha_2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta_3}{\alpha_3} + \ldots.$$

(J.-W.-L. Glaisher, N. C., **439**.)

(*Laisant*, **79**, 29.)

9. Si l'on convient de représenter par l'imaginaire

$$\alpha + \beta i, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

un point dont les coordonnées rectangulaires sont α, β, l'imaginaire

$$\frac{(\alpha + \beta z) + (\alpha' + \beta' z)i}{(\gamma + \delta z) + (\gamma' + \delta' z)i},$$

où z est une variable réelle, représente tous les points d'une même circonférence. (Laguerre, M., 6.)

(*Cesàro*, **81**, 123, 127.)

*10. Mettre le produit

$$(1 + n\sqrt{-1})(1 + n^2\sqrt{-1})(1 + n^4\sqrt{-1})(1 + n^8\sqrt{-1})\ldots$$

sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Dans chacun des polynomes P, Q, déterminer les coefficients des puissances de n. Quelle est la loi générale? Déduire, de ce problème, la décomposition de

$$(1 + n^2)(1 + n^4)(1 + n^8)(1 + n^{16})\ldots$$

en une somme de deux carrés. (Catalan, M., **811**.)

Déterminants; évaluations, et problèmes.

11. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 \end{vmatrix} = a_1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

(PROUHET, N. A., 408.)

(58, 190.)

12. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ . & \dots\dots & \dots & . \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

(PROUHET, N. A., 409.)

(58, 191.)

13. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ n-1 & n & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix} \text{ est égal à } \pm \frac{n^{n-1}(n+1)}{2};$$

$+$, si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$;
$-$, si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$.

(PAINVIN, N. A., 432.)

(*Baehr*, **60**, 170.)

14. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \dots & \alpha+(n-2)\delta & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \dots & \alpha+(n-1)\delta & \alpha \\ \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \dots & \alpha & \alpha+\delta \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & . & \dots\dots \\ \alpha+(n-1)\delta & \alpha & \dots & \alpha+(n-3)\delta & \alpha+(n-2)\delta \end{vmatrix}$$
$$= \pm \frac{(n\delta)^{n-1}[2\alpha+(n-1)\delta]}{2}.$$

Si l'on fait

$$\alpha = \delta = 1,$$

on retombe sur la question 432 [1].

(MICHAEL ROBERTS, N. A., 465.)

(*Cremona*, **60**, 151.)

***15.** Si, dans un déterminant d'ordre n, on efface tous les termes qui renferment *au moins* deux éléments de l'une quelconque des deux diagonales ou d'une parallèle à ces diagonales, quel est le nombre des termes restants? (N. A., 445.)

---

[1] *Voir* l'énoncé précédent.

16. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 & \dots & a_2-b_n \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 & \dots & a_3-b_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & a_n-b_3 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

est égal à $(a_1-a_2)(b_1-b_2)$ lorsque $n=2$, et pour $n>2$ il est nul. (N. A., **474**.)

(*Harang*, **63**, 60.)

17. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est égal au produit

$$P = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n-2})\dots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3})\dots(\alpha_2-\alpha_1).$$

(N. A., **515**.)

(**60**, 181.)

18. Si α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et qu'on désigne par P le produit des facteurs obtenus en remplaçant, dans l'expression

$$a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+\dots+a_n\alpha^{n-1},$$

α successivement par les n racines de l'unité, on a

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

(Stern, N. C., **185**.)

(*Mennesson*, **77**, 21; **78**, 185.)

19. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} (n+1)_n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (n+2)_n & (n+2)_{n+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (n+3)_n & (n+3)_{n+1} & (n+3)_{n+2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & . & .. & . \\ (n+r)_n & (n+r)_{n+1} & (n+r)_{n+2} & (n+r)_{n+3} & \dots & (n+r)_{n+r-1} \end{vmatrix} = (n+r)_n,$$

le symbole n_k désignant le nombre des combinaisons de n lettres, k à k. (MORENO, N. C., 420.)

(*Colart*, **80**, 79.)

***20.** Démontrer et généraliser les deux théorèmes suivants :

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = \begin{cases} [x-(a+b+c)] \\ \times [x^2-(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^{-1}+c\omega^{-2})], \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c & d \\ b & c-x & d & a \\ c & d & a-x & b \\ d & a & b & c-x \end{vmatrix} = \begin{cases} [x-(a+b+c+d)] \\ \times [x-(a-b+c-d)] \\ \times [x^2-(a+ib+i^2c+i^3d) \\ \qquad \times (a-ib+i^2c-i^3d)], \end{cases}$$

ω étant une des racines cubiques de l'unité.

(J.-W.-L. GLAISHER, N. C., 440.)

***21.** Déduire, par des transformations de déterminants, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{12}Z_{45}-Z_{12}Y_{45} & Z_{12}X_{45}-X_{12}Z_{45} & X_{12}Y_{45}-Y_{12}X_{45} \\ Y_{23}Z_{56}-Z_{23}Y_{56} & Z_{23}X_{56}-X_{23}Z_{56} & X_{23}Y_{56}-Y_{23}X_{56} \\ Y_{34}Z_{61}-Z_{34}Y_{61} & Z_{34}X_{61}-X_{34}Z_{61} & X_{34}Y_{61}-Y_{34}X_{61} \end{vmatrix}$$

du déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & z_1x_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & y_2z_2 & z_2^2 & z_2x_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & y_3z_3 & z_3^2 & z_3x_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & y_4z_4 & z_4^2 & z_4x_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5z_5 & z_5^2 & z_5x_5 \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & y_6z_6 & z_6^2 & z_6x_6 \end{vmatrix}.$$

On a posé

$$X_{mn}=y_m z_n - z_m y_n,\quad Y_{mn}=z_m x_n - x_m z_n,\quad Z_{mn}=x_m y_n - y_m x_n.$$

(Le Paige, N. C., 490.)

22. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a & d \\ c' & a' & d' \\ c'' & a'' & d'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} d & b & a \\ d' & b' & a' \\ d'' & b'' & a'' \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & aa'+bb'+cc'+dd' & aa''+bb''+cc''+dd'' \\ aa'+bb'+cc'+dd' & a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 & a'a''+b'b''+c'c''+d'd'' \\ aa''+bb''+cc''+dd'' & a'a''+b'b''+c'c''+d'd'' & a''^2+b''^2+c''^2+d''^2 \end{vmatrix}.$$

Cette identité donne la décomposition d'une foule de nombres en une somme de quatre carrés. (Le Paige, N. C., 514.)

(*Jamet*, **80**, 92.)

23. Évaluer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

dont la loi générale de formation peut s'énoncer comme il suit : Chaque déterminant renferme $2m-1$ lignes et $2m-1$ colonnes. La diagonale contient $m-1$ fois l'unité, et m fois le nombre m. Les lignes se déduisent de cette diagonale, en écrivant, à droite des unités, $m-1$ fois le chiffre 1, et à gauche des chiffres m, la série naturelle $m-1$, $m-2$, ..., 2, 1, 0; et complétant les lignes par des zéros. (Brocard, N. C., 566.)

(*Le Paige*, **80**, 382.)

24. Le déterminant formé par les permutations tournantes successives des termes d'une progression arithmétique est égal à

$$(-n\delta)^{n-1}\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\delta\right),$$

α étant le premier terme, δ la raison, n le nombre des termes. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-4)^3\left(1+\frac{3}{2}\right) = -160.$$

(CESÀRO, M., 245) [1].

(*Gillet*, **86**, 60.)

25. Calculer la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-\delta) \\ \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \sin(a+\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-2\delta) \\ \sin(a+n\delta-2\delta) & \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \dots & \sin(a+n\delta-3\delta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \sin(a+3\delta) & \dots & \sin a \end{vmatrix}.$$

(NEUBERG, M., 273.)

(*Neuberg*, **90**, 117.)

26. Décomposer en facteurs le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin 2\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix}.$$

(ALLERSMA, M., 327.)

(*Gillet*, **86**, 88.)

---

[1] Question à rapprocher des énoncés 13 et 14 ci-dessus.

27. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}.$$

Appliquer le résultat à des cas particuliers remarquables.

(De Longchamps, J. S., 332.)

Déterminants; propriétés.

28. Soit le déterminant à n^2 termes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

a_{pq} et a_{qp} sont deux nombres imaginaires conjugués, de sorte que a_{pp} est un nombre réel. Démontrer que le déterminant est réel. (N. A., 370.)

(*Rochette*, 57, 336, 435.)

29. Si l'on désigne par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos n\alpha_0 & \cos(n-1)\alpha_0 & \cos(n-2)\alpha_0 & \dots & \cos 0\,\alpha_0 \\ \cos n\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-2)\alpha_1 & \dots & \cos 0\,\alpha_1 \\ \cos n\alpha_2 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cos(n-2)\alpha_2 & \dots & \cos 0\,\alpha_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \cos n\alpha_n & \cos(n-1)\alpha_n & \cos(n-2)\alpha_n & \dots & \cos 0\,\alpha_n \end{vmatrix},$$

et par D_1 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 & \dots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 & \dots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 & \dots & \cos^0 \alpha_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n & \dots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix},$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1. \quad \text{(Prouhet, N. A., 410.)}$$

(*E. Mathieu*, **58**, 187.)

30. Si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin \alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin \alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 & \dots & \sin \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin \alpha_n \end{vmatrix},$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \dots \sin\alpha_n D_1 \text{ (1)}.$$

(Prouhet, N. A., 411.)

(*E. Mathieu*, **58**, 187.)

31. Si, généralement, on désigne par $a_{i,n}$ l'expression

$$a_{i,n} = (\alpha_i + \beta_i n)\cos n\varphi + (\gamma_i + \delta_i n)\sin n\varphi,$$

où n représente un entier quelconque, positif ou négatif, et α_i, β_i, γ_i, δ_i des constantes arbitraires indépendantes de n, le déterminant

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{0,n} & a_{0,n+1} & \dots & a_{0,n+k} \\ a_{1,n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+k} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{k,n} & a_{k,n+1} & \dots & a_{k,n+k} \end{vmatrix}$$

(1) D_1 est le déterminant défini dans l'énoncé précédent.

s'évanouira toutes les fois que $k > 3$, et pour $k = 3$ il conservera la même valeur, quelle que soit celle de n. (HIRST, N. A., 489.)

(*Bignon*, **70**, 561.)

32. Soient n quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; on pose

$$\Sigma \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite. Soient

$$f(x) = x^n + x^{n-1} \Sigma \alpha_1 + x^{n-2} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 + \ldots$$

et $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$: démontrer que la valeur algébrique du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

est $f(1) - f'(1)$. (M. ROBERTS, N. A., 694.)

(*Smet-Jamar*, **64**, 395, 397.)

33. Soient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{R}$$

et α_{ik} le coefficient de a_{ik} dans R. Si l'on désigne par D le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm a_{11} & a_{12} \pm a_{21} & \ldots & a_{1n} \pm a_{n1} \\ a_{12} \pm a_{21} & a_{22} \pm a_{22} & \ldots & a_{2n} \pm a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \pm a_{n1} & a_{n2} \pm a_{2n} & \ldots & a_{nn} \pm a_{nn} \end{vmatrix},$$

et par Δ le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans D les quantités a_{ik} par α_{ik}, on aura

$$\Delta = R^{n-2} D.$$

(E. Hunyady, N. A., 1416.)

34. Si les éléments d'un déterminant persymétrique, d'ordre n, forment une série arithmétique, de degré $n - 1$, le déterminant est égal à

$$\pm (\Delta^{n-1} a_{1.1})^n.$$

(Studnička, N. C., 200.)

(*Colart*, **79**, 200, 204; **80**, 231.)

35. Si les éléments des diverses lignes, horizontales ou verticales, d'un déterminant d'ordre n, forment des séries arithmétiques, de degré $n - 2$, le déterminant s'annule.

(Studnička, N. C., 209.)

(**79**, 209.)

36. Démontrer que le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_1 & a_2 + a_0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \\ a_2 & a_3 + a_1 & a_4 + a_0 & a_5 & a_6 & a_7 & & \\ a_3 & a_4 + a_2 & a_5 + a_1 & a_6 + a_0 & a_7 & & & \\ a_4 & a_5 + a_3 & a_6 + a_2 & a_7 + a_1 & a_0 & & & \\ a_5 & a_6 + a_4 & a_7 + a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_6 & a_7 + a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

est divisible par le déterminant

$$S = \begin{vmatrix} a_2 - a_0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_3 - a_1 & a_4 - a_0 & a_5 & a_6 & a_7 & \\ a_4 - a_2 & a_5 - a_1 & a_6 - a_0 & a_7 & & \\ a_5 - a_3 & a_6 - a_2 & a_7 - a_1 & -a_0 & & \\ a_6 - a_4 & a_7 - a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 & \\ a_7 - a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \end{vmatrix}$$

et trouver le quotient. Généraliser le résultat obtenu.

(Farkas, N. C., 600.)

*37. Soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(1,1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varphi(1) \\ f(2,1) & f(2,2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \varphi(2) \\ f(3,1) & f(3,2) & f(3,3) & \dots & 0 & 0 & \varphi(3) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & . & . & \dots \\ f(x-2,1) & f(x-2,2) & f(x-2,3) & \dots & f(x-2,x-2) & 0 & \varphi(x-2) \\ f(x-1,1) & f(x-1,2) & f(x-1,3) & \dots & f(x-1,x-2) & f(x-1,x-1) & \varphi(x-1) \\ f(x,1) & f(x,2) & f(x,3) & \dots & f(x,x-2) & f(x,x-1) & \varphi(x) \end{vmatrix}$$

identiquement nul pour $x = \alpha$. Si l'on y supprime la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne, on forme un nouveau déterminant, qui, multiplié par $f(\alpha, \alpha)$, est identique avec le déterminant primitif.

(E. Cesàro, N. C., 604.)

38. Soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des quantités positives quelconques; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ des quantités positives ou négatives, dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité.

Démontrer que le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -\lambda_1 a_1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -\lambda_1 a_1 & a_1+a_2 & -\lambda_2 a_2 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 a_2 & a_2+a_3 & -\lambda_3 a_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{n-2}+a_{n-1} & -\lambda_{n-1} a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -\lambda_{n-1} a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

est nécessairement positif. (Novarese, M., 680.)

(*Baudran*, **91**, 24.)

39. Démontrer que $x - 2$ est facteur de

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & x & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver les autres facteurs. (M., 820.)

(*Retali*, **93**, 172.)

40. Démontrer que, pour trouver la dérivée d'un déterminant dont tous les éléments sont fonctions d'une même variable, il suffit de faire la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans le déterminant proposé tous les éléments d'une colonne par leurs dérivées. (PICQUET, J. M., **215**.)

(*Colin*, **80**, 325.)

41. Si l'on désigne par U la fonction du second degré à trois variables

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D; \end{aligned}$$

par H le discriminant de cette fonction rendue homogène; par Δ celui de l'ensemble des termes du second degré; par α, α', α'', β, β', β'' les mineurs, qui dans Δ correspondent respectivement à A, A', A'', B, B', B''; enfin par V le déterminant

$$\left|\begin{array}{ll} \beta''z - \beta'y + B'C' - B''C'' + \sqrt{H} & \beta'x - \alpha z + BC' - A'C'' \\ \alpha'z - \beta y + AC'' - B'C & \beta x - \beta''z + B''C'' - BC + \sqrt{H} \\ \beta z - \alpha''y + B''C - AC' & \alpha''x - \beta'z + A'C - B''C' \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha y - \beta''x + A''C' - BC'' \\ \beta''y - \alpha'x + B'C'' - A''C \\ \beta'y - \beta x + BC - B'C' + \sqrt{H} \end{array}\right|;$$

on a

$$V = \Delta\sqrt{HU}. \quad \text{(TISSOT, J. S., 289.)}$$

42. Si l'on désigne par U la fonction du second degré à trois variables

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D; \end{aligned}$$

par H le discriminant de cette fonction rendue homogène; par γ, γ', γ'' et Δ les mineurs qui, dans H, correspondent respective-

ment à C, C′, C″ et D; enfin, par W le déterminant

$$\begin{vmatrix} A'\sqrt{H} & B''\sqrt{H}+\gamma''-\Delta z & B'\sqrt{H}-\gamma'+\Delta y \\ B''\sqrt{H}-\gamma''+\Delta z & A'\sqrt{H} & B\sqrt{H}+\gamma-\Delta x \\ B'\sqrt{H}+\gamma'-\Delta y & B\sqrt{H}-\gamma+\Delta x & A''\sqrt{H} \end{vmatrix};$$

on aura

$$W \equiv \Delta^2\sqrt{HU}. \quad \text{(Tissot, J. S., 291.)}$$

43. Un déterminant de l'ordre n a pour éléments de la diagonale principale des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; tous les autres éléments sont égaux à x. Démontrer que ce déterminant, égalé à zéro, représente une équation du degré n, ayant toutes ses racines réelles, ou toutes ses racines réelles moins deux.

(De Longchamps, J. S., 298.)

(*Philastre*, **92**, 142.)

Analyse combinatoire.

44. Dans un produit de n facteurs monomes, on ne peut échanger que $2^{n-1}-1$ fois les signes des facteurs, soit en totalité, soit en partie, sans changer le signe du produit.

(N. A., 244.)

(*Genocchi*, **52**, 453.)

45. Soit

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n;$$

supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent prendre respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes; alors z aura au plus $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ valeurs différentes, mais il peut en avoir moins. Dans quel cas? (N. A., 245.)

(*Moret-Blanc*, **94**, 43*.)

46. Étant donnés m nombres en progression arithmétique, trouver le nombre de leurs combinaisons n à n, ayant la propriété que la somme des n nombres composant chaque combinaison ne dépasse pas le plus grand des nombres donnés.

(J. Sacchi, N. A., 804.)

47. On a une permutation entre les chiffres 1, 2, 3, ..., m. On connaît les quantités suivantes :

σ_1, nombre de chiffres supérieurs à 1, que le 1 a avant lui; σ_2, nombre de chiffres supérieurs à 2, que le 2 a avant lui, etc.

On demande :

1° Quelle est la permutation; 2° d'indiquer la série d'opérations à faire sur σ_1, σ_2, ... pour trouver un chiffre de rang donné; 3° une formule donnant : 1° le premier chiffre en fonction de σ_1, σ_2, σ_3, ..., σ_m; 2° le deuxième chiffre en fonction de ces mêmes quantités, etc.

Nota. — Soit 38.217 456 une permutation de 8 chiffres, on a

$$\sigma_1 = 3, \qquad \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 2, \qquad \sigma_3 = \sigma_8 = 0, \qquad \sigma_7 = 1.$$

(BRUN, N. C., 344.)

48. Soient $A_{m,n}$ le nombre total des arrangements des nombres 1, 2, 3, ..., m pris n à n; $Q_{m,n}$ celui des arrangements dans lesquels aucun élément n'occupe la place assignée par sa valeur. Démontrer les formules

$$A_{m,n} = Q_{m,n} + C_{n,1} Q_{m-1,n-1} + C_{n,2} Q_{m-2,n-2} + \ldots + C_{n,n} Q_{m-n,0};$$
$$Q_{m,n} = A_{m,n} - C_{n,1} A_{m-1,n-1} + C_{n,2} A_{m-2,n-2} - \ldots \pm C_{n,n} A_{m-n,0}.$$

(NEUBERG, M., 278.)

(*Neuberg*, **86**, 253.)

***49.** On peut décomposer un polygone de $m = (p-2)n + 2$ côtés en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)(np-n-1)\ldots(np-2n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

manières différentes. (H. M. TAYLOR et ROWE, M., 333.)

50. Dans une pile de boulets rectangulaire, quel est le nombre des points de contact de deux boulets? (E. LEMOINE, M., 828.)

(*Soons*, **94**, 72.)

51. Dans les piles de boulets : 1° triangulaires; 2° quadran-

gulaires, quel est le nombre des points de contact de deux boulets?

Le premier nombre n'est jamais un carré. Trouver dans quel cas le second est un carré. (E. LEMOINE, J. E., 432.)

(*Sollertinsky*, **93**, 43.)

52. Sommer les suites

$$C_n^1 + 2^3 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + \ldots + (n-1)^3 C_n^{n-1} + n^3 C_n^n,$$
$$1 + C_3^2 C_n^1 + C_4^2 C_n^2 + \ldots + C_{n+1}^2 C_n^{n-1} + C_{n+2}^2 C_n^n,$$
$$2^n + C_n^1 C_{n-1}^1 2^{n-2} + C_n^2 C_{n-2}^2 2^{n-4} + \ldots + C_n^p C_{n-p}^p 2^{n-2p} + \ldots,$$

C_n^p indiquant le nombre des combinaisons de n objets p à p.

(J. M., 385.)

53. Trouver le nombre de manières dont on peut distribuer p objets distincts entre q personnes, de telle sorte que chacune d'elles ait un objet au moins. (J. M., 386.)

(*Jullien*, J. S., **83**, 127.)

54. Dans un déterminant de Vandermonde

$$|1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}|,$$

on remplace les éléments de la dernière colonne par a^{n+p-1}, b^{n+p-1}, ..., l^{n+p-1}.

Démontrer que le déterminant correspondant est égal au déterminant de Vandermonde multiplié par la somme des combinaisons p à p, avec répétition, des lettres a, b, ..., l.

(VAUTRÉ, J. S., 337.)

(*H. Lebesgue*, **93**, 286.)

Binome et coefficients binomiaux.

55. La somme des carrés des coefficients de $(k+1)^r$, r étant entier positif, est égale à $\frac{[2r]}{[r]^2}$, les crochets désignant des produits continuels.

Exemple :

$$r = 3;$$

alors

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = \frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.3)^2} = 20. \quad \text{(LAGRANGE, N. A., 389.)}$$

(*Combescure,* **57**, 296, 369, 375.)

56. Nommons S un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de $(1-x)^i$, où l'exposant est négatif, ou bien un groupe quelconque de termes consécutifs à coefficients positifs dans le développement de $(1+x)^i$, où i est positif; écrivons S sous la forme $x^k\Sigma$, Σ sera ou une quantité qui ne change jamais son signe quel que soit x, ou une telle quantité multipliée par un binôme du premier degré.

La même proposition aura lieu pour un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de l'exponentielle e^x. (SYLVESTER, N. A., 811.)

(*Pellet,* **68**, 287.)

57. La somme des carrés des coefficients de $(x+y)^{2m}$, pris avec des signes alternés, est égale, en valeur absolue, au plus grand de ces coefficients. (ROUSSEAU, N. C., 148.)

(*Freson,* **77**, 86.)

58. Si l'on désigne par n_k le coefficient de x^k dans le développement du binôme $(1+x)^n$, on a

$$\frac{n_k(n_k-1)}{1.2} = \sum_{m=1}^{m=k}(-1)^{m+1}n_{k-m}n_{k+m}.$$

Ainsi, par exemple, pour $n=7$, $k=3$, on trouve

$$\frac{35.34}{1.2} = 21.35 - 7.21 + 7.1. \quad \text{(STUDNIČKA, N. C., 262.)}$$

(*Freson,* **77**, 361.)

59. En se servant des mêmes désignations que dans la ques-

tion précédente, on a encore

$$\frac{[(2n)_n][(2n)_n-1]}{1.2}=\sum_{m=1}^{m=n}{}'(-1)^{m+1}(n_{n-m})^2.$$

Par exemple, pour $n=4$,

$$\left[\frac{70.69}{2}\right]^2=56^2-28^2+8^2-1.$$ (STUDNIČKA, N. C., 263.)

(*Freson*, **77**, 362.)

60. Si l'on pose

$$(1+x)^n=\Sigma n_p x^p,$$

n étant entier et positif, et

$$S_0=\Sigma n_{3q},\qquad S_1=\Sigma n_{3q+1},\qquad S_2=\Sigma n_{3q+2},$$

parmi les trois nombres S_0, S_1, S_2, il y en aura toujours deux qui seront égaux entre eux et qui différeront, du troisième, d'une unité. (GRAVES, N. C., 270.)

[**79**, 236 (1).]

61. Soit n_ν le coefficient de x^ν dans le développement de $(1+x)^n$.

Démontrer les formules

$$n_1-\frac{1}{2}n_2+\frac{1}{3}n_3-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}n_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

$$n_1-2n_2+3n_3-\ldots+(-1)^n(n-1)n_{n-1}=0.$$

(M., 716.)

(*Greenstreet*, **91**, 236.)

62. Trouver : 1° trois coefficients binomiaux consécutifs qui forment une progression arithmétique; 2° quatre coefficients binomiaux consécutifs qui forment une proportion géométrique.

Démontrer qu'il ne peut exister trois coefficients binomiaux consécutifs qui soient en progression géométrique ou en progres-

(1) *Voir* aussi **79**, 204.

sion harmonique, ni quatre coefficients consécutifs qui soient en progression arithmétique. (SCHOUTE, M., 744.)

(*Soons*, **92**, 119.)

63. Étant donné un nombre N quelconque du triangle arithmétique, si l'on considère : d'une part, la colonne des nombres situés au-dessus de N, et commençant à N; d'autre part, la ligne où se trouve N et commençant à l'unité; la somme algébrique des produits deux à deux des nombres de même rang dans ces deux suites, produits affectés tour à tour du signe + et du signe —, est nulle.

Si l'on remplace la colonne par la diagonale commençant à N, le théorème est encore vrai. (H. PICQUET, J. S., 157.)

(*Picquet*, **88**, 172.)

Développements de puissances ou de produits.

64. Parmi les m quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, il y a p quantités négatives. Combien y a-t-il de termes négatifs dans le développement de $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)^n$, n étant un nombre entier positif? (N. A., 28.)

(*Brocard*, **75**, 235.)

65. Si l'on développe l'expression $(1 - 2ax + a^2)^n$ suivant les puissances de a : 1° le développement aura toujours un nombre impair de termes; 2° les coefficients de la lettre ordonnatrice des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux; 3° si l'on égale à zéro ces coefficients qui sont des polynomes entiers et rationnels en x, ils ont toutes leurs racines imaginaires lorsqu'ils sont de degré pair, et ils renferment, en outre, une racine nulle lorsqu'ils sont de degré impair.

(ESCARY, N. A., 1259.)

(*Moret-Blanc*, **79**, 321.)

*66. α étant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, on propose de trouver le développement de l'expression

$$[A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha_3 + \ldots + A_m\alpha^m]^{\frac{1}{p}}.$$

(BROCARD, N. C., 346.)

67. Dans le développement du produit

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots,$$

savoir

$$1 - a - b + ab - c + ac + bc - abd - d + \ldots,$$

quel est le signe du $n^{\text{ième}}$ terme? (CATALAN, N. C., 542.)

[*Cesàro*, **80**, 276 (1).]

*68. Dans le développement de

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots\right)^m$$

le coefficient de x^p est

$$\frac{S_{m+p-1,p}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)} \text{ (2)}.$$

(CESÀRO, M., 357.)

69. Trouver le coefficient du terme en x^p dans le développement suivant

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1})^2.$$

(FABRE, J. M., 271.)

(*Andrieux*, **81**, 90.)

---

(1) *Voir* aussi un Mémoire présenté au Congrès d'Alger (1881) de l'*Association française pour l'avancement des Sciences* : C.-A. LAISANT; *Sur le développement de certains produits algébriques*.

(2) $S_{m+p-1,p}$ représente la somme des produits p à p des $m+p-1$ premiers nombres entiers.

*70. k étant un nombre entier, le coefficient de x^k dans le développement de

$$\frac{(1+x)^{2k}(1-x)}{1+x^3}$$

est $3k$. (CATALAN, J. S., 342.).

DÉRIVÉES. — SÉRIES. — LIMITES.

Dérivées et différentielles.

71. Soient

$$t = f(x, y), \qquad u = F(x, y),$$

d'où

$$x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t);$$

on a

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1;$$

f'_x est la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, et ainsi des autres. (MÖBIUS, N. A., 189.)

(*Murent*, 48, 298, 338.)

72. Soit $D^n \operatorname{tang}\varphi$ la dérivée d'ordre n de $\operatorname{tang}\varphi$; on a l'équation symbolique

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$D^{n-1} D^0 + (n-1) D^{n-2} D^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} D^{n-3} D^2 + \ldots,$$

où

$$D^0 = \operatorname{tang}\varphi.$$

Lorsque $n = 1$, le dernier terme doit être pris $= 1$; alors

$$D^1 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}^2\varphi + 1. \quad \text{(N. A., 566.)}$$

(*De Virieu, Combette*, 61, 434, 439.)

73. Soient les trois variables x, y, z exprimées par les nouvelles variables u, v, w, de la manière suivante

$$x = \frac{(1 + h^2 v^2 + c^2 w^2) u}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$y = \frac{[1 - h^2 u^2 + (c^2 - h^2) w^2] v}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$z = \frac{[1 - c^2 u^2 - (c^2 - h^2) v^2] w}{u^2 + v^2 + w^2};$$

h et c sont des quantités constantes; il faut démontrer que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + Q^2 dv^2 + R^2 dw^2,$$

où

$$Pu = x, \qquad Qv = y, \qquad Rw = z.$$ (STREBOR, N. A., 682.)

(*Hemming*, **65**, 554.)

74. Soient

$$l \cos\theta + m \sin\theta \cos\varphi + n \sin\theta \sin\varphi$$
$$+ p \cos^2\theta + q \sin^2\theta \cos^2\varphi + r \sin^2\theta \sin^2\varphi = U,$$
$$\frac{l^2}{2p + \psi} + \frac{m^2}{2q + \psi} + \frac{n^2}{2r + \psi} + \psi = V.$$

Il faut démontrer que l'équation résultant de l'élimination de θ et de φ entre $U = 0$, $\frac{dU}{d\theta} = 0$, $\frac{dU}{d\varphi} = 0$, sera identique avec celle qui provient de l'élimination de ψ entre $V = 0$, $\frac{dV}{d\psi} = 0$.

(CAYLEY, N. A., 683.)

(*Laisant*, **67**, 473.)

75. Soient x, y, z trois fonctions d'une variable indépendante t, satisfaisant à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

soient x', y', z', x'', y'', z'' leurs dérivées, premières et secondes, par rapport à t.

Les neuf quantités x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' vérifient

identiquement l'égalité

$$AC - B^2 - A^2 = D^2,$$

dans laquelle

$$A = x'^2 - y'^2 - z'^2,$$
$$B = x x' - y' y' - z' z',$$
$$C = x'^2 - y'^2 + z'^2,$$
$$D = x(y' z' - z' y') + y(z' x' - x' z') + z(x' y' - y' x').$$

(CATALAN, N. A., 720.)

(*Chemin*, 65, 369, 371.)

76. F(x) étant une fonction rationnelle et entière du degré n; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ étant des valeurs quelconques de x en nombre p, et p étant plus grand que $n+1$; enfin, $f(x)$ représentant le produit

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p),$$

on a toujours

$$\sum_{x_1}^{x_p} \frac{F(x)}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = 0. \quad \text{(MATHIEU, N. A., 839.)}$$

(68, 552.)

77. On a

$$y\sqrt[4]{\frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}} = e^{\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{2(x - \sqrt{x^2 - y^2})}};$$

calculer $\frac{dy}{dx}$. (BROCARD, N. C., 64.)

(*Laisant*, 76, 61.)

78. Trouver les dérivées des fonctions circulaires inverses

$$\text{arc sin}\, x, \quad \text{arc cos}\, x, \quad \text{arc tang}\, x$$

en s'appuyant seulement sur la définition de la dérivée et sur

les formules inverses de l'addition des arcs

$$\begin{aligned}
\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin} y &= \operatorname{arc\,sin}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\\
\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,cos} y &= \operatorname{arc\,cos}\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right),\\
\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} y &= \operatorname{arc\,tang}\frac{x+y}{1-xy}.
\end{aligned}$$

(PICQUET, J. M., 216.)

(*Arnaud*, **80**, 326.)

79. Démontrer la règle de Leibnitz pour trouver la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit uv de deux fonctions de x

$$y_n = vu_{(n)} + C_1^n v' u_{(n-1)} + C_2^n v'' u_{(n-2)} + \ldots,$$

en démontrant que, si cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre $(n-1)$, elle est encore vraie pour la dérivée d'ordre n. Appliquer ce théorème à la recherche de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction

$$y = e^{ax}\cos(mx+p). \quad \text{(J. M., 219.)}$$

(*Arnaud*, **80**, 380.)

80. Trouver la relation qui existe entre trois dérivées successives d'ordre quelconque de la fonction

$$(x^2-1)^n;$$

montrer qu'il ne peut exister de relation entre deux dérivées successives; la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n-p$. Soit $f(x)$ une des dérivées de $(x^2-1)^n$; $f'(x)$ et $f''(x)$ étant les dérivées première et seconde de $f(x)$, la relation qu'il s'agit de trouver aura la forme

$$Af(x) + Bf'(x) + Cf''(x) = 0;$$

chercher s'il existe d'autres fonctions entières du même degré vérifiant la même identité. (L. LÉVY, J. S., 118.)

(*Bourgarel*, **87**, 260.)

81. Si l'on pose $A_0 = \sin x$, $A_1 = \sin x - x\cos x$, puis si l'on

calcule A_2, A_3, ... par la formule de récurrence

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x^2 A_{n-1},$$

A_n est de la forme $U_n \sin x + V_n \cos x$. Démontrer les propriétés suivantes :

1° On a

$$A'_n = x A_n - 1,$$
$$x A''_n - 2n A'_n + x A_n = 0,$$

les accents indiquant des dérivées;

2° La fonction A_n s'annule pour $x = 0$ ainsi que ses $2n$ premières dérivées. Quelle valeur prend alors la dérivée d'ordre $2n+1$?

3° Écrivant $U_n + iV_n = P_n$, puis faisant $x = iy$, P_n est un polynome en y à coefficients réels et de degré n

$$P_n = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_p y^{n-p} + \ldots$$
$$+ a_n y P''_n - 2(y+n)P'_n + 2nP_n = 0,$$

puis on en conclut

$$a_p = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1.2.3\ldots(n+p)}{1.2\ldots(n-p),\ 1.2\ldots p},$$

a_p est entier. (Hermite, J. S., 154.)

(*Berthon*, **90**, 88.)

Séries numériques.

82. On a

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 + \ldots.$$

(Catalan, N. A., 457.)

(*De Virieu*, *Genocchi*, **59**, 125, 161.)

83. On a

$$\log 2 = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \frac{1}{13.14.15} + \ldots\right).$$

(Euler, N. A., 572.)

[*Prinz*, *Le Taunéac*, **61**, 284, 366, 393 (1).]

(1) *Voir* aussi **61**, 266.

84. Démontrer la formule

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots.$$

[CATALAN, N. A., 929 (¹).]

85. Démontrer que $\sqrt{5}$ est égal à la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \ldots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n.$$

(ED. LUCAS, N. A., 1248.)

(*Moreau, Catalan,* **78**, 136, 252.)

86. On a la série rapidement convergente

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2207} + \ldots,$$

dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.

(ED. LUCAS, N. A., 1249.)

(*Moreau, Catalan,* **78**, 138, 252.)

87. Démontrer que $\sqrt{5}$ est la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{8} - \frac{4}{21} + \frac{5}{55} - \frac{6}{144} + \ldots.$$

(ED. LUCAS, N. A., 1322.)

(*Krantz,* **82**, 419.)

(¹) Cette formule est due à M. BAUER (*J. de Crelle,* LVI, p. 110). *Voir* N. C., **75**, 272, une Note de CATALAN.

88. Trouver la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2+1^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2}$$
$$+ \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2} + \ldots.$$

(Ed. Lucas, N. C., 494.)

(*Mangon*, **80**, 418.)

89. Démontrer que la série

$$\frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{2.3}{4.5.6.7} + \frac{3.4}{5.6.7.8} + \ldots$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{9}$. (Neuberg, M., 27.)

(*Fouquet*, **80**, 76, 139.)

90. Démontrer que

$$\frac{1}{1^4.3^4} + \frac{1}{5^4.7^4} + \frac{1}{7^4.9^4} + \ldots = \frac{1}{1536}(\pi^4 - 6\pi^3 + 30\pi^2 - 60\pi).$$

(Barniville, M., 906.)

*91. Étudier la série

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{(1.2).2^2.5} + \frac{1.3}{(1.2.3).2^3.7} + \ldots + \frac{1.3\ldots 2n-3}{(n!)2^n(2n+1)} + \ldots;$$

montrer qu'elle est convergente et que sa valeur égale $2 - \frac{\pi}{4}$.

(Roux, J. S., 220.)

Séries. — Sommations.

92. $\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \frac{x}{x^2+3^2} + \ldots = 0$ pour $\lim x = 0$ [1].

(N. A., 557.)

(*De Virieu*, **61**, 135.)

---

[1] Énoncé rectifié; voir la solution de M. de Virieu.

93. Si

$$y + z = 1,$$

on a

$$\sum_1^\infty \frac{y^p + z^p}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} - \log y \log z.$$

On prend pour p tous les nombres entiers positifs de 1 à ∞. Faisant

$$y = z = \tfrac{1}{2},$$

on a

$$\sum \frac{1}{2^{p-1} p^2} = \frac{\pi^2}{6} - (\log 2)^2. \quad \text{(Euler, N. A., 571.)}$$

(*Dellac*, **61**, 375).

94. Trouver la somme des séries suivantes :

1°

$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n},$$

dans laquelle $\varphi(n)$ est un polynome du degré p.

2°

$$\sum \frac{\varphi(n)}{f(n)},$$

où l'on a

$$f(n) = (n + a)(n + a + 1)\ldots(n + a + p),$$

et où $\varphi(n)$ est un polynome au plus du degré $(p - 1)$.

(Darboux, N. A., 853.)

(*Pellet*, **70**, 417.)

95. Si l'on désigne par n un nombre entier positif, et par D_n la différence des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on aura, à partir de $n = 2$,

$$D_n = (-1)^{n-1}\left[p^{n-1} - \frac{n-2}{1} p^{n-3} q + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} p^{n-5} q^2 - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} p^{n-7} q^3 + \ldots\right] \times D_1;$$

le développement s'arrête, pour une valeur particulière de n, au dernier terme qui ne s'évanouit pas. (BAEHR, N. A., 968.)

(*Bignon*, **71**, 515.)

96. Déduire de la formule de la question précédente la relation

$$n = 2^{n-1} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} 2^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} 2^{n-7} + \ldots.$$

(BAEHR, N. A., 969.)

(*Bignon*, **71**, 515.)

97. Trouver la somme de la série

$$\cos^3\varphi - \frac{1}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi - \frac{1}{3^2}\cos^3 3^3\varphi + \ldots.$$

(LAISANT, N. A., 987.)

(*Rumpen*, **72**, 232.)

98. On a

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots,$$

quels que soient les nombres $a, b, c, \ldots$, pourvu que le second membre forme une série convergente (ce qui a toujours lieu, si $a, b, c, \ldots$ sont des nombres positifs croissants par exemple).

(H. LAURENT, N. A., 1181.)

(*Barbarin, Catalan*, **76**, 135, 180; **78**, 256.)

99. μ étant une quantité positive quelconque,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\mu+2^n-1} + \frac{1}{\mu+2^n} + \frac{1}{\mu+n}\right] = l^2.$$

(CATALAN, N. C., 44.)

(*Laisant, de Tilly*, **75**, 232.)

100. Vérifier la relation

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots = {} & \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} \\ & - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} - \frac{x^{15}}{1-x^{15}} - \frac{x^{17}}{1+x^{17}} \\ & - \frac{x^{19}}{1-x^{19}} - \frac{x^{21}}{1-x^{21}} - \frac{x^{23}}{1+x^{23}} \\ & - \frac{x^{29}}{1-x^{29}} - \ldots \text{ (1)}. \end{aligned}$$

(CATALAN, N. C., **106**.)

(*Catalan*, **77**, 418.)

101. Démontrer que

$$\frac{1^m}{1} + \frac{2^m}{1.2} + \frac{3^m}{1.2.3} + \frac{4^m}{1.2.3.4} + \ldots = ne$$

m, n étant des nombres entiers.

Exemples :

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \ldots = e,$$

$$\frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1.2} + \frac{3^2}{1.2.3} + \frac{4^2}{1.2.3.4} + \ldots = 2e,$$

$$\frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{1.2} + \frac{3^3}{1.2.3} + \frac{4^3}{1.2.3.4} + \ldots = 5e,$$

$$\frac{1^4}{1} + \frac{2^4}{1.2} + \frac{3^4}{1.2.3} + \frac{4^4}{1.2.3.4} + \ldots = 15e.$$

(DOBINSKI, N. C., **343**.)

(*Freson, Le Paige*, **78**, 220, 287, 329, 383; N. A., **85**, 38.)

---

(1) La variable x est, bien entendu, comprise entre -1 et $+1$. Le terme général, dans le second membre, étant représenté par $\pm \frac{x^n}{1-x^n}$, les facteurs premiers de n sont impairs et inégaux : le signe $+$ répond au cas où ces facteurs sont en nombre pair. (*Note de l'auteur.*)

102. On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots$$
$$=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3}+\ldots.$$

(CATALAN, M., **267**.)

Séries. — Convergence ou divergence.

103. Démontrer que la série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3.4\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)}+\ldots$$

est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{(n-1)1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Cela donne la formule

$$\frac{1}{A_n^n}+\frac{1}{A_n^{n+1}}+\frac{1}{A_n^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)A_{n-1}^{n-1}},$$

en désignant par A_n^{n+1} le nombre des arrangements de $(n+1)$ lettres n à n. (VANNSON, N. A., **461**.)

(*Bouterg*, **59**, 242, 273; **60**, 34; **61**, 155.)

***104.** Soient a_1, a_2, a_3, ... des nombres qui tendent, en décroissant, vers zéro, et b_1, b_2, b_3, ... des nombres positifs qui croissent toujours. Démontrer que, si la série

$$a_1b_1+a_2(b_2-b_1)+a_3(b_3-b_2)+\ldots$$

est divergente, il en est de même de la série

$$(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)b_2+(a_3-a_4)b_3+\ldots.$$

(CESÀRO, N. A., **1584**).

***105.** Soit $u_1+u_2+u_3+\ldots$ une série divergente dont les

termes tendent, en décroissant, vers zéro. Démontrer que, si la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est convergente, la moyenne arithmétique des n premiers nombres ε ne peut avoir d'autre limite que zéro, lorsque n croît à l'infini. (CESÀRO, N. A., **1585**.)

106. Si les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$, continuellement croissants, tendent vers une limite finie, la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \pm u_n \mp \ldots$$

est indéterminée. (CATALAN, N. C., **360**.)

(*Bombled*, **79**, 55.)

107. I. La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, où

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - k(\log n : n),$$

est convergente si k est supérieur à 1, divergente si k est inférieur ou égal à 1. Les logarithmes sont supposés népériens.

II. Si α_n tend vers zéro avec $(1 : n)$, la série

$$\Sigma(1 - \alpha_n)^n$$

sera convergente si le rapport $(n\alpha_n : \log n)$ tend vers une limite supérieure à 1, quand n est de plus en plus grand, divergente si ce rapport tend vers une limite inférieure à 1, ou s'il tend vers l'unité, en lui restant sans cesse inférieur.

(JAMET, M., **760**.)

(*Cesàro*, **92**, 125.)

108. La valeur de la série

$$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+2)} + \frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} + \ldots$$

est 1, si le produit

$$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots$$

est infini, ce qui a lieu, en particulier, si la série à termes positifs

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

est divergente.

La série précédente est convergente si le produit est nul ou indéterminé. (H. LAURENT, J. M., **210**.)

(*Lestoquoy*, **80**, 187.)

109. Soit la série

$$1 + \frac{x}{x+p+1} + \frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots n+p+n+1} + \ldots.$$

On demande d'établir que cette série est convergente quand p est positif, divergente quand p est négatif, et de déduire de la considération de cette suite une démonstration du théorème de Duhamel. Examiner aussi le cas intermédiaire où $p = 0$.

(J. M., **218**.)

(*Haure*, **80**, 403.)

110. On demande si la série

$$1 + \frac{2^m}{1} + \frac{3^m}{2^{m+p}} + \frac{4^m}{3^{m+p}} + \ldots + \frac{n^m}{(n-1)^{m+p}} + \ldots$$

est convergente.

On pourra appliquer le théorème qui permet d'employer le rapport $\dfrac{\frac{1}{\mathrm{L}.u_n}}{\mathrm{L}.n}$ comme caractère de convergence. (J. M., **358**.)

(*Cadot*, J. S., **82**, 93.)

Séries récurrentes.

111. Soient A_n, A_{n+1}, A_{n+2} trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_n A_{n+2} - A_{n+1}^2$, elle est aussi récurrente.

(FOURIER, N. A., **141**.)

(*Tardy*, **54**, 23; *Brioschi*, **55**, 20.)

112. Soit

$$T_{n+2} = aT_{n+1} - bT_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - aT_nT_{n+1} + bT_n^2}{b^n} = \text{const.}$$

(EULER, N. A., **241**.)

[*Loxhay*, **52**, 424; *Brioschi*, **55**, 20 (¹); *Genocchi*, **61**, 53.]

113. Soit

$$T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n,$$

équation d'une série récurrente. Les deux premiers termes étant 1 et 3, aucun terme n'est un carré, à l'exception de 1.

(EULER, N. A., **242**.)

(*Faure*, **53**, 161, 336; *Genocchi*, **61**, 54.)

114. Soit la série récurrente

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

telle que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n;$$

trouver la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{5}{3.8} + \ldots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+3}}.$$

(ED. LUCAS, N. A., **1329**.)

(*Arnaud*, **80**, 467.)

115. Trouver la somme des inverses des termes de rang pair ou de rang impair de la série de Lamé.

(ED. LUCAS, N. C., **141**.)

(*Catalan*, N. A., **78**, 253.)

(¹) Nous recommandons tout spécialement au lecteur le remarquable article de M. Brioschi concernant à la fois cette question et la précédente.

Séries. — Propriétés et questions diverses.

116. Soit

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots 2n+1} + \ldots;$$

on propose de démontrer qu'en faisant successivement

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x}[\varphi(x) - \varphi_1(x)],$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{x}[\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x)],$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{x}[\varphi_2(x) - 5\varphi_3(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{i+2}(x) = \frac{1}{x}[\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x)],$$

fonction $\varphi_i(x)$ ne contiendra que des puissances positives de la variable et d'en trouver l'expression. (Hermite, N. A., **795.**)

(*De Grossouvre*, **67**, 374.)

117. Si $p_0, p_1, p_2, \ldots, q_0, q_1, q_2, \ldots$ sont des nombres entiers, tels que $\frac{p_n}{q_n}$ ait une limite finie ou nulle, la limite de la série

$$\frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_0 q_1} + \frac{p_2}{q_0 q_1 q_2} - \ldots$$

est une quantité incommensurable. (De Morgan, N. A., **801.**)

(*Pellet*, **67**, 372.)

118. Chercher les séries telles que, si l'on met le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

sous la forme

$$\frac{1}{1+\alpha},$$

$n\alpha$ soit constant et égal à k. Montrer qu'on peut trouver la somme des p premiers termes de ces séries. Retrouver la règle de convergence connue, ainsi qu'une limite du reste.

(DARBOUX, N. A., 854.)

(**72**, 280.)

119. Démontrer que le produit des deux séries

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\frac{1}{2}x+\frac{1}{a+4}\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1}{a+6}\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots$$

est

$$\frac{1}{a}\left[1+\frac{a+1}{a+2}x+\frac{(a+1)}{(a+2)}\frac{(a+3)}{(a+4)}x^2+\frac{(a+1)(a+3)(a+5)}{(a+2)(a+4)(a+6)}x^3+\ldots\right]$$

(HERMITE, N. A., 950.)

(*Callandreau*, **71**, 330.)

120. Démontrer l'identité suivante

$$[1-2(a+b+c+\ldots)x+(a+b+c+\ldots)(aA^2+bB^2+cC^2+\ldots)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum\sum\sum\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}$$
$$\times\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}(x^2-A^2)^\alpha(x^2-B^2)^\beta(x^2-C^2)^\gamma\ldots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}},$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de α, β, γ et $\alpha!$ étant supposé devenir égal à 1, quand $\alpha=0$.

(F. DIDON, N. A., 1062.)

(*Escary*, **77**, 281.)

121. La différence entre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ et e est comprise entre $\frac{e}{2m+1}$ et $\frac{e}{2m+2}$, quel que soit m. (N. A., 1098.)

(*Moreau*, **74**, 61.)

122. On calcule une suite de fonctions, d'après la loi

$$u_{n+1} = \log \frac{e^{u_{n-1}}}{u_n},$$

en supposant $u_1 = x$. Démontrer la formule

$$e^x - 1 = u_1 + u_1 + u_2 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

(CESÀRO, N. A., **1583**.)

(*Audibert*, **92**, 35*.)

***123.** Quelles sont les séries dans lesquelles la somme des carrés des $2n+1$ premiers termes est égale à la somme des $4n+1$ premiers termes? (ED. LUCAS, N. C., **145**.)

124. Trouver la relation qui existe entre les coefficients des diverses puissances de x, dans le développement de

$$-1^n + 3^n - 5^n + \ldots + (4x-1)^n,$$

et les coefficients de la série

$$\text{séc}\, x = E_0 - \frac{E_2 x^2}{1.2} + \frac{E_4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots \text{ (1)}.$$

(ED. LUCAS, N. C., **390**.)

***125.** On a

$$\left[1 + \left(\frac{\frac{1}{4}}{1}\right)^2 x - \left(\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}}{1.2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}}{1.2.3}\right)^2 x^3 + \ldots\right]^2$$
$$= 1 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)^2 x + \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\right)^2 x^3 + \ldots.$$

(GAUSS et CAYLEY, N. C., **481**.)

---

(1) *Voir* t. III (1877), p. 279, la solution de la question 212.
(*Note de M. Catalan.*)

126. Trouver le coefficient de α^p, dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$. (CATALAN, N. C., 551.)

(*Radicke, Leinekugel,* **80**, 281, 283, 332.)

127. Étant données deux circonférences C et C′ tangentes entre elles, et une de leurs tangentes extérieures AB, on mène une circonférence C″ tangente aux deux circonférences proposées et à AB, puis une circonférence C‴ tangente à C, à C″ et à AB et ainsi de suite. On propose d'étudier les séries formées par les rayons de ces circonférences successives et par les surfaces des mêmes cercles. On donne $AB = 2a$ et $AC = R$.

(J. M., 217.)

(*Godard,* **80**, 401.)

128. Étudier la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3^2} + \ldots.$$

(J. M., 309.)

***129.** Soit la série

$$y = x + x^2 + 2x^3 + \ldots + \frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{2.3\ldots n} x^{n+1} + \ldots$$

qui est convergente, si l'on suppose $x < \frac{1}{4}$.

On demande de démontrer que l'on a, pour toutes les valeurs de l'exposant ω,

$$\frac{1}{(1-y)^{\omega}} = 1 + \omega x + \frac{\omega(\omega+3)}{1.2} + \frac{\omega(\omega+4)(\omega+5)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\omega(\omega+n+1)(\omega+n+2)\ldots(\omega+2n-1)}{1.2\ldots n} x^n + \ldots.$$

(HERMITE, J. S., 255.)

Questions de limites. — Formules et propriétés.

130. Si $m = p^2 - q$, la suite des fractions

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{pa + mb}{a + pb}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{pa' + mb'}{a' + pb'}, \quad \ldots$$

converge vers $\sqrt{m}$, quelle que soit la fraction initiale $\frac{a}{b}$; m, p, q, a, b sont des nombres entiers positifs donnés.

(PROUHET, N. A., 265.)

(*Thiolier*, **53**, 169.)

131. Soient

$$\begin{aligned} x_1 &= p^{\frac{1}{2}}, \\ x_2 &= (p + \sqrt{p_2 + q x_1})^{\frac{1}{2}}, \\ x_3 &= (p + \sqrt{p_2 + q x_2})^{\frac{1}{2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (p + \sqrt{p^2 + q x_{n-1}})^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

p et q sont supérieurs à zéro; démontrer que :

1° Les termes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ vont en croissant;

2° $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ est une quantité positive;

3° $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}$;

4° $x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^2}\right)^{\frac{n-2}{4}}$.

(GRÜNERT, N. A., 447.)

(*Berquet*, **67**, 323.)

132. $\lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = l.2$ (pour n infini).

(CATALAN, N. A., 458.)

(*Cornet*, **58**, 463; **59**, 66, 147, 150.)

133. Soit une fonction $f(x)$ quelconque, finie et continue dans l'intervalle de a à x. Insérons, entre a et x, $n-1$ moyens géométriques $a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}$, $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, ..., $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$, et désignons par Mg la moyenne arithmétique des valeurs

$$f(a),\quad f\left(a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right),\quad \ldots,\quad f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right],\quad f(x).$$

D'un autre côté, insérons $n-1$ moyens arithmétiques

$$a+\frac{x-a}{n},\quad a+\frac{2(x-a)}{n},\quad \ldots,\quad a+\frac{(n-1)(x-a)}{n},$$

entre a et x et désignons par Ma la moyenne arithmétique des valeurs

$$\frac{f(a)}{a},\quad \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}},\quad \ldots,\quad \frac{f\left[a+\frac{(n-1)(x-a)}{n}\right]}{a+\frac{(n-1)(x-a)}{n}},\quad \frac{f(x)}{x}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{Ma}{Mg}$ tend vers une limite complètement indépendante de la fonction f; cette limite est $\frac{\log\frac{x}{a}}{x-a}$. (F. Didon, N. A., **1056**.)

(*Moret-Blanc*, **72**, 469.)

134. Soit, pour n infini,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda,$$

dans une série à termes positifs. Démontrer que

$$\lim\sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1u_2u_3\ldots u_n}}}=\sqrt{\lambda}.$$

(Cesàro, N. A., **1577**.)

(*Servais*, **91**, 8°.)

135. Si $\lim n^x a_n = a$, pour n infini, on a

$$\lim n^x \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = a e^x.$$

(CESÀRO, N. A., **1578**.)

(*Servais*, **91**, 9*.)

***136.** Si les nombres positifs a_1, a_2, a_3, ... sont tels que l'on ait $(a_n - n) = a$ pour n infini, on aura également

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n} = e^a.$$

(CESÀRO, N. A., **1579**.)

***137.** Si, dans la question précédente, on fait

$$b_n = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n),$$

on a

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \ldots b_n^n} = e^{2a+1}.$$

(CESÀRO, N. A., **1580**.)

***138.** Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession a_1, a_2, a_3, ... tend vers une limite finie et déterminée k, on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \ldots a_n^{u_1}} = k^s,$$

u_1, u_2, u_3, ... étant les termes d'une série convergente quelconque dont la somme est s. (CESÀRO, N. A., **1661**.)

139. Si le nombre des variations de signes, dans la suite

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \ldots, \quad \cos(n-1)x,$$

est v_n, le rapport $\frac{v_n}{n}$ a pour limite $\frac{x}{\pi}$, quand n croît indéfiniment. (J. KÖNIG, N. C., **487**.)

(*Radicke*, **80**, 82.)

140. Désignons par

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

la série binomiale

$$1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p-1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

Démontrer que le quotient

$$\frac{u_p + u_{n+p} + u_{2n+p} + \ldots}{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots}$$

a pour limite $(1 : n)$, lorsque p augmente indéfiniment; p est supposé moindre que n, et x positif. (NEUBERG, M., 277.)

(*Cesàro*, **86**, 161.)

141. Démontrer que, pour n croissant indéfiniment,

$$\lim \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^p + \left(a+\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(a+\frac{p-p}{n}\right)^p}{n} = \frac{(a+1)^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

(CATALAN, M., 342.)

(*Van den Broeck*, **85**, 43.)

142. Démontrer que l'expression

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

tend vers $\frac{2}{3}$, quand n croît indéfiniment.

(TROÏLLE, J. S., 208.)

(*Plamenewsky*, **90**, 179.)

Questions de limites. — Problèmes.

143. Aux deux extrémités d'une droite AB on élève deux perpendiculaires AC, BD de longueurs données; puis on insère entre AC, BD un certain nombre $p - 1$ de moyennes géométriques, et on les dispose entre AC et BD parallèlement à ces deux lignes et à égale distance les unes des autres : en unissant

par des droites les extrémités m, m', m'', ... d ces parallèles, il en résulte un polygone $ACmm'm''\ldots DB$, qui devient (à la limite $p=\infty$) un trapèze curviligne : trouver la surface de ce trapèze. (VANNSON, N. A., 459.)

(*Vernier*, **59**, 148.)

144. Soient p et q deux nombres *donnés;* p_1 la moyenne arithmétique, q_1 la moyenne géométrique; p_2 la moyenne arithmétique de p_1, q_1; q_2 leur moyenne géométrique, et ainsi de suite, de sorte que p_{n+1}, q_{n+1} sont les moyennes arithmétique et géométrique de p_n, q_n. On demande de déterminer la valeur de p_∞ et de démontrer que $p_\infty = q_\infty$. (GAUSS, N. A., 509.)

(*Colot*, **62**, 57.)

145. Soit une série de paires de quantités, a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; ..., les a étant plus grandes que les b, dont la loi de la formation est la suivante

$$a_x = a_{x-1} + b_{x-1}, \qquad b_x = a_{x-1},$$

il faut chercher la limite du rapport $\frac{a_x}{b_x}$ lorsque x devient infini.

(STREBOR, N. A., 692.)

(*De Saint-Prix*, **64**, 260.)

146. On prend la moyenne arithmétique p_1 et la moyenne harmonique q_1 de deux nombres donnés p et q;

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \qquad q_1 = \frac{2pq}{p+q}.$$

On opère de même sur p_1, q_1; puis sur p_2, q_2, et ainsi de suite, de telle manière que

$$p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}, \qquad q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}.$$

Trouver l'expression générale de p_n en fonction de p et q;

montrer qu'on a

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > \sqrt{pq} \qquad \text{et} \qquad q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < \sqrt{pq}.$$

(Ed. Lucas, N. A., 1325.) [1].

(*Mathieu*, **79**, 529.)

147. Trouver la limite de l'expression

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n},$$

lorsque n augmente indéfiniment. (Laisant, N. C., 546.)

(*Cesàro, Fauquembergue*, **80**, 278, 280.)

148. Vérifier que

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \ldots$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \ldots.$$

Quelle est la limite commune? (Catalan, M., 218.)

(*Cesàro*, **85**, 182.)

149. x étant un nombre inférieur à l'unité et P, Q désignant les produits indéfinis

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots,$$
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots,$$

1° Le produit $P.Q = 1$.

2° Le produit indéfini P, dont tous les facteurs sont moindres que 1, a une limite positive.

---

[1] M. Lucas ajoute : « Il est probable que c'est là la méthode employée par les anciens, dans l'approximation des racines carrées ».

(*Note de la Rédaction.*)

3° Le produit Q, dont tous les facteurs surpassent l'unité, a une limite [1]. (M., 790.)

(*Cesàro*, **94**, 194.)

150. Trouver, sans appliquer la règle de L'Hospital, la vraie valeur de l'expression

$$y = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \ldots - 2x - 1}{x-1}$$

pour $x = 1$. (De Longchamps, J. S., 7.)

(*Griffon*, **83**, 9.)

***151.** Trouver, pour $n = \infty$, la limite de

$$\frac{L(n!)}{n\,Ln}.$$

(De Longchamps, J. S., 388.)

Nombres de Bernoulli et d'Euler, et nombres analogues.

152. On a

$$f(1) - f(3) + f(5) - \ldots \pm f(2n-1) = \pm \frac{1}{2} f(\varepsilon + 2n) + \text{const.},$$

$$f(2) - f(4) + f(6) - \ldots \pm f(2n) \quad = \pm \frac{1}{2} f(\varepsilon + 2n + 1) + \text{const.},$$

pourvu que l'on remplace les puissances de ε par les nombres d'Euler correspondants, définis par la relation symbolique

$$(\varepsilon + 1)^p + (\varepsilon - 1)^p = 0, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

(Cesàro, N. A., 1444.)

---

[1] Avec la Théorie des fonctions elliptiques, ces propositions sont évidentes (et connues).

Peut-on les démontrer par les Éléments d'Arithmétique ou d'Algèbre? (*Note de la Rédaction.*)

153. Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations

$$(B+1)^p - B^p = 0, \qquad (\varepsilon+1)^p + (\varepsilon-1)^p = 0,$$

satisfont aux relations symboliques

$$\begin{aligned}(2B+1)^p &= (2-2^p)B^p,\\ (4B+1)^p &= (2-2^p)B_p - p\varepsilon_{p-1},\\ (4B+3)^p &= (2-2^p)B_p + p\varepsilon_{p-1}.\end{aligned}$$

(Cesàro, N. A., 1446.)

*154. Exprimer S_{2n+1} en fonction linéaire des carrés de S_1, S_2, ..., S_n. (Ed. Lucas, N. C., 194.)

*155. Exprimer le produit $S_m S_n S_p$ en fonction linéaire des sommes S. (Ed. Lucas, N. C., 195.)

*156. Trouver la somme des inverses des nombres de Bernoulli, et la somme des inverses des nombres P.

(Ed. Lucas, N. C., 196.)

157. Démontrer la relation suivante entre les nombres de Bernoulli :

$$B_{2p-1} + \frac{(2p-3)(2p-1)}{1.2.3} B_{2p-2} + \frac{(2p-5)(2p-3)(2p-2)(2p-1)}{1.2.3.4.5} B_{2p-3} + \ldots + \frac{B_1}{1.2} = \frac{1}{2p(2p+1)}.$$

(Le Paige, N. C., 380.)

158. En posant

$$\tau_n = -1^n + 5^n - 3^n + 7^n - \ldots + (-1)^x(2x-1)^n,$$

on a, pour n impair,

$$(-1)^x 4\tau_n = (\varepsilon+2x)^n - (\varepsilon-2x)^n,$$

pourvu que l'on remplace les puissances de ε par les nombres d'Euler correspondants.

Trouver la formule analogue pour le cas de n pair.

(RADICKE, N. C., 561.)

(*Cesàro*, **80**, 415, 461, 468.)

159. On a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=ln+l\left(1-\frac{B}{n}\right)+0,577215664\ldots,$$

pourvu que l'on substitue, aux puissances de B, les nombres de Bernoulli correspondants, définis par la relation symbolique

$$(B+1)^p-B^p=0.$$

(CESÀRO, N. C., 574.)

160. Les nombres définis par l'égalité symbolique

$$(B+1)^p-B^p=0$$

satisfont à la relation symbolique

$$(B+B)^p+pB^{p-1}+(p-1)B^p=0.$$

(CESÀRO, N. C., 575.)

161. Les nombres définis par la relation symbolique

$$(B+1)^p-B^p=0$$

satisfont à l'égalité symbolique

$$(4B+1)^p=(2B+1)^p,$$

si p est pair. Chercher la formule analogue, dans le cas de p impair. (CESÀRO, N. C., 577.)

162. On a

$$\frac{(S+B)^p-B^p}{p}=nS^{p-1}-S^p,$$

à condition de remplacer S^k par $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ et de

substituer aux puissances de B les nombres de Bernoulli correspondants, définis par la relation symbolique

$$(B+1)^p - B^p = 0.$$

(CESÀRO, N. C., 579.)

163. Si, dans les relations

$$\begin{aligned}(2B+1)^p &= (2-2^p)B^p,\\ (4B+1)^p + (4B+3)^p &= 2.(2B+1)^p,\\ (4B+1)^{2p} + (4B+3)^{2p} &= (2B+1)^{2p},\end{aligned}$$

on substitue, aux puissances de B, les nombres de Bernoulli correspondants, symboliquement définis, par la relation

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$

on obtient des identités. (CESÀRO, N. C., 592.)

164. On considère les nombres définis symboliquement par les égalités

$$\begin{aligned}(\varepsilon+1)^p + (\varepsilon-1)^p &= 0,\\ (B+1)^p - B^p &= 0.\end{aligned}$$

Démontrer les relations symboliques

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= (4B+2)^p + \tfrac{1}{3}C_{p,2}(4B+2)^{p-2} + \tfrac{1}{5}C_{p,4}(4B+2)^{p-4} + \ldots,\\ 2p\varepsilon_{p-1} &= (4B+3)^p - (4B+1)^p,\\ -p\varepsilon_{p-1} &= (4B+1)^p + (2^p-2)B_p\ (^1).\end{aligned}$$

(CESÀRO, N. C., 593.)

165. B_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, démontrer les relations suivantes

$$\begin{aligned}C_{2n,2}B_1B_{n-1} + C_{2n,4}B_2B_{n-2} + \ldots + C_{2n,2n}B_{n-1}B_1 &= (2n+1)B_n,\\ C_{2n+2,2}B_1 - C_{2n+2,4}\ B_2 + \ldots \pm C_{2n+2,2n}B_n &= n,\\ C_{2n+1,1}\ B - C_{2n+1,5}\ B_2 + \ldots \pm C_{2n+1,2n-1}\ B_n &= 4.\end{aligned}$$

---

(1) Les relations entre les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler sont fort nombreuses : dans divers Mémoires, j'en ai donné quelques-unes. Celles que propose M. Cesàro sont-elles nouvelles?

(*Note de Catalan.*)

Remarque. — En retranchant la dernière de l'avant-dernière, on obtient la relation de Moivre (*Cours d'Analyse de l'Université de Liége*). (CESÀRO, N. C., 603.)

ÉQUATIONS.

Théorèmes généraux. Propriétés de polynomes algébriques.

166. Soit $V = 0$ une équation du degré m à une seule inconnue x, dont les racines $a, b, c, d, e, \ldots, h$ sont inégales; et V_1 la dérivée de V. Supposons qu'on opère comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre V et V_1, en ayant soin de changer les signes des restes, lorsqu'ils serviront de diviseur, et désignons par $V_2, V_3, V_4, \ldots, V_m$ ces restes changés de signe.

Les polynomes $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m$ s'exprimeront en fonction des racines de $V = 0$, d'après la règle que nous allons indiquer.

La dérivée V_1 est, comme on sait, la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des facteurs $(x-a), (x-b), (x-c), \ldots, (x-h)$; c'est ce que nous écrirons ainsi

$$V_1 = \Sigma(x-b)(x-c)\ldots(x-h).$$

Pour obtenir l'expression de V_2, on multipliera chacun des produits $m-2$ à $m-2$ des facteurs

$$(x-a), \quad (x-b), \quad (x-c), \quad \ldots, \quad (x-h),$$

par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit considéré; la somme de ces derniers produits, multipliée elle-même par un facteur positif indépendant de x, donnera V_2; c'est-à-dire que

$$V_2 = \alpha\Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h); \quad \alpha > 0.$$

On a de même

$$V_3 = \beta\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)\ldots(x-h); \qquad \beta > 0,$$
$$V_4 = \gamma\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h); \quad \gamma > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$V_m = \zeta(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(g-h)^2; \qquad \zeta > 0.$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

(SYLVESTER, N. A., 22.)

(*Moret-Blanc*, **94**, 27*.)

167. Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données, par le moyen du théorème de Descartes.

(JACOBI, N. A., 174.)

(*Moret-Blanc*, **94**, 42*.)

168. Soit une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de l'équation sont des racines de l'unité.

(KRONECKER, N. A., 373.)

(**57**, 292.)

169. Étant donnée une équation algébrique n'ayant pas de racines égales, si l'on applique à cette équation le procédé de Sturm, et si l'une des équations ainsi obtenues a des racines égales, l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires. (ROUGET, N. A., 553.)

(**63**, 274.)

170. Considérons la suite des fonctions de Sturm V, V_1, V_2, ..., V_n; si l'une des équations $V_r = 0$ a p racines imaginaires, la proposée a au moins p racines imaginaires.

(DARBOUX, N. A., 850.)

(*Pellet*, **68**, 334.)

***171.** Former la suite des fonctions de Sturm pour l'équation qui donne $\tan\frac{a}{n}$ quand on connaît $\tan a$.

(DARBOUX, N. A., 851.)

172. Si, en multipliant $f(x)$ par $x - a$ $(a > 0)$, on introduit $2k + 1$ variations, l'équation $f(x) = 0$ a, au moins, $2k$ racines imaginaires. (FINCK, N. C., **178**.)

(*Realis*, **77**, 194; *Terquem*, N. A., **46**, 115.)

173. Donner la suite des fonctions de Sturm, pour les équations

$$x^m \pm 1 = 0,$$

$$x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1 = 0,$$

$$x^m + px + q = 0,$$
$$x^m - x - a = 0,$$
$$x^m - x^{m-1} - a = 0.$$

(BROCARD, N. C., **402**.)

174. Soit la fonction $y = \dfrac{x - a}{x^2 + 1}$.

1° Démontrer qu'en désignant par $y' y'' \ldots y_{(n)}$ les dérivées successives de y, on a entre trois dérivées consécutives la relation

$$(x^2 + 1) y_{(n)} + 2nx y_{(n-1)} + n(n-1) y_{(n-2)} = 0.$$

2° Démontrer que, si l'on pose

$$y_n = (-1)^n 1.2.3 \ldots n \frac{V_{n+1}}{(1 + x^2)^{n+1}},$$

V_{n+1} est un polynome en x du degré $(n + 1)$, dont le premier terme est x^{n+1}, et que, entre trois polynomes consécutifs, on a la relation $V_n - 2x V_{n-1} + (1 + x^2) V_{n-2} = 0$.

3° En posant $V = 1$, le théorème de Sturm s'applique à la suite des polynomes V_n, V_{n+1}, et les racines de l'équation $V_n = 0$ séparent celles de l'équation $V_{n-1} = 0$.

4° Les coefficients de V sont des fonctions linéaires de la constante a, et, en posant $V_n = P_n - aQ_n$, on a, si $x = \cot\varphi$, $\cot n\varphi = \dfrac{P_n}{Q_n}$. Conclure de là des expressions trigonométriques des racines de l'équation $V_n = 0$.

Remarque. — On pourra établir cette relation en posant

$$u_n = \frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi} - a\frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi}$$

et prouvant que u_n est un polynome entier en x de degré n où l'on fait $x = \cot\varphi$, et que trois polynomes consécutifs sont liés par la relation

$$u_n - 2xu_{n-1} + (1 + x^2)u_{n-2} = 0.$$

5° On propose d'établir que les polynomes V_n satisfont aux deux équations suivantes

$$nV_{n+1} = 2nxV_n - (2 + x^2)V'_n$$
$$(1 + x^2)V''_n - 2(n-1)xV'_n + n(n-1)V_n = 0.$$

(J. M., **220**.)

(*Leroux,* **80**, 328.)

175. Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \ldots - x - 1 = 0,$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, n'a aucune racine réelle si n est impair, et une seule racine négative si n est pair. (De Longchamps, J. S., 5.)

(*Alexandre,* **83**, 8.)

176. Démontrer que le nombre des variations de la suite de Sturm, pour une équation donnée, lorsqu'on y fait $x = \alpha$, est égal au nombre des racines réelles de cette équation, qui sont supérieures à α, augmenté du nombre des racines imaginaires. (Hermite, J. S., 264.)

(*Le Huédé,* **89**, 143.)

Équations du troisième degré.

177. Soit l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0;$$

faisons

$$A = \sqrt{p^2 - q};$$

si les trois racines sont réelles, elles sont comprises, la première entre $-p-2A$ et $-p-A$; la seconde entre $-p-A$ et $-p+A$, et la troisième entre $-p+A$ et $-p+2A$; s'il n'y a qu'une racine réelle, elle ne tombe jamais entre $-p-2A$ et $-p+2A$. (N. A., **71**.)

(*Faure*, **44**, 170.)

178. Si les racines d'une équation du troisième degré sont de la forme p^2, q^2, $2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles. (Prouhet, N. A., **326**.)

(*Plessix*, **56**, 299.)

179. i étant la racine réelle de l'équation cubique

$$x^3+qx+r=0,$$

les deux autres racines sont

$$-\frac{i}{2}\pm\frac{1}{2}\left[\frac{4q^2-9ri+6qi^2}{\sqrt{-(4q^3+27r^2)}}\right].$$

(Lebesgue, N. A., **330**.)

(*Molard*, **56**, 305.) (1)

180. Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première équation seront données par les formules

$$a=m+h,$$
$$b=mu^2+h,$$
$$c=2mu+h,$$

m, h et u étant des nombres rationnels. (Prouhet, N. A., **349**.)

(*Rochette*, **57**, 172.)

181. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation

$$x^3-px+q=0,$$

(1) *Voir* aussi un article de M. Brioschi, **56**, 366.

on aura

$$p^2 + 3y' a^2 = r'^2,$$
$$p^2 + 3y'' b^2 = r''^2,$$
$$p^2 + 3y''' c^2 = r'''^2;$$

y', y'', y''' et r', r'', r''' étant racines entières de deux équations cubiques homogènes que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de p et q. Le produit $r' r'' r'''$, pris positivement, sera un carré.

(REALIS, N. A., **833**.)

(*Realis*, **78**, 190.)

182. Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + px + q,$$

dans laquelle la quantité $-4p^3 - 27q^2$ est égale à un carré r^2, on sait que la différence entre deux racines quelconques de cette équation est exprimable par une fonction entière de la troisième racine, fonction qui est du second degré, et dont les coefficients sont exprimés rationnellement au moyen des quantités connues p, q, r. On propose, réciproquement, d'exprimer l'une quelconque des racines par une fonction entière du second degré de la différence entre les deux autres racines, les coefficients de cette fonction devant de même être exprimés rationnellement au moyen de p, q, r. (REALIS, N. A., **1187**.)

(*Moreau*, **76**, 186.)

183. Si les trois racines de l'équation

$$x^3 - 3qx + r = 0$$

sont réelles, chacune d'elles est moindre que $2\sqrt{q}$; mais si une seule de ces racines est réelle, sa valeur surpasse $2\sqrt{q}$.

(GENESE, N. A., **1229**.)

(*Brunot*, **77**, 333, 425.)

184. A chaque racine réelle K de l'équation à coefficients réels

$$y^3 + (4p + 1)y + 8q = 0$$

correspond une racine appartenant à l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

et comprise entre $\frac{K-1}{2}$ et $\frac{K+1}{2}$. (REALIS, N. A., **1238.**)

(*Realis*, **78**, 331.)

185. L'équation

$$x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0,$$

dans laquelle α et β sont des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme, n'a pas de racine entière.

(REALIS, N. A., **1239.**)

(*Ed. Lucas*, **78**, 227.)

186. L'équation

$$x^3 - (\beta - \gamma)x + \alpha\gamma = 0,$$

dans laquelle α et γ sont des entiers plus grands que zéro et β est un entier satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 > \beta \geqq (\alpha - 1)^2,$$

ou bien à la condition

$$\alpha^2 < \beta \leqq (\alpha + 1)^2,$$

a au moins une racine réelle incommensurable.

(REALIS, N. A., **1240.**)

(*Moret-Blanc*, **78**, 228.)

187. L'équation $x^3 - (a^2 - b + c)x + ab = 0$, dans laquelle b est un entier plus grand que zéro, c un entier différent de zéro, et a un entier dont la valeur absolue est plus grande que celle de $\frac{c}{2}$, ne peut avoir deux racines entières.

Si l'équation a des racines imaginaires, la racine réelle est incommensurable. (REALIS, N. A., **1280.**)

(*Realis*, **79**, 468.)

188. 1° Si l'équation

$$y^3 + (p+1)y + 2q = 0,$$

où p et q sont des nombres entiers, a une racine en commun avec l'une ou l'autre des équations

$$(2) \qquad \begin{cases} y^2 + (p+1)y + 3q = 0, \\ y^2 - (p+1)y - 3q = 0, \end{cases}$$

l'équation

$$(3) \qquad x^3 + px + 2q = 0$$

a une racine entière.

2° Si l'équation (1) a une racine entière, qui ne satisfasse à aucune des équations (2), l'équation (3) a une racine incommensurable. (Realis, N. C., **362.**)

189. Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles, les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif. (M., **17.**)

(*Fauquembergue,* **93**, 48.)

190. Les équations de la forme

$$x^3 - (x + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0,$$

où α, β, γ sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du troisième degré ayant une racine, entière ou fractionnaire, qu'on puisse trouver par la règle de Tartaglia (ou de Cardan), en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. (Kummer, M., **52.**)

(*Fauquembergue,* **85**, 204.)

191. Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients p, q, r de l'équation du troisième degré

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

pour que les racines soient les sinus des angles d'un triangle.

(J. M., **296**.)

(*Quiquet*, **81**, 237.)

192. Soient a, b, c, d quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle. Si l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, l'équation proposée a au moins deux racines imaginaires. (Walecki, J. S., 53.)

(*Ferval*, **85**, 47.)

193. Trouver toutes les équations du troisième degré telles que, si x_1 est une de leurs racines, convenablement choisie, les deux autres soient

$$-\frac{x_1+1}{x_1} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{1+x_1}.$$

(Weill, J. S., **129**.)

(*Ferval*, **86**, 286.)

Équations du quatrième degré. — Résolutions et problèmes.

194. On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits*, du *marquis de L'Hospital*, la question suivante : « Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB; on suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a, dans le temps c, et dans l'autre du côté de F, l'espace b, dans le même temps c. On demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible pour parvenir de C en F. » L'auteur, prenant pour inconnue la distance du point E au pied de la perpendiculaire menée du point C sur

la droite AB, a seulement donné l'équation du problème, qui est du quatrième degré. On propose de déterminer le nombre des solutions et de discuter complètement le problème.

(N. A., 79.)

(*De Virieu*, **62**, 206.)

*195. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Trouver la surface et le rayon de ce quadrilatère? (Darboux, N. A., 852.)

196. Résoudre les équations

$$(1) \qquad x^4 - x^3\sqrt{15} + 4x^2 - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad x^4 - x^3\sqrt{3} - 2x^2 + 2x\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Interpréter leurs racines. (Goffart, N. A.. 1481.)

(**84**, 348.)

197. Décomposer en deux facteurs du second degré le premier membre de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

où l'on suppose

$$A\sqrt{D} = C.$$ (Borletti, N. A., 1488.)

(*Goffart*, **84**, 442.)

198. Résoudre l'équation

$$(x + a)(x + a + b)(x + a + 2b)(x + a + 3b) = c.$$

(Vecchio, N. C., 192.)

(*Realis*, **77**, 90.)

199. Ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation réciproque. (M., 7.)

(*Brocard, Neuberg*, **81**, 199; **82**, 181.)

200. Résoudre l'équation

$$a^4 + b^4 + c^4 + x^4 = (bc + ax)^2 + (ca + bx)^2 + (ab + cx)^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + x^2)^2.$$

(CATALAN, M., 585.)

(*Beyens*, **88**, 25.)

201. Résoudre l'équation

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0.$$

(BARISIEN, M., 926.)

202. Établir une relation entre les coefficients de l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$$

pour qu'on puisse la mettre sous la forme

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0.$$

(J. M., 286.)

(*Lapareillé*, **81**, 265.)

203. Si α, β, γ, δ sont les racines de l'équation du quatrième degré $f(x) = 0$, on peut exprimer la somme

$$f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) + f'(\delta)$$

sous la forme d'un produit de trois facteurs. (J. M., 297.)

(*Baron*, **81**, 284.)

204. Résoudre l'équation

$$(z^2 - K^2)^2 - 4K(z^3 - K)(Kz - 1) = 0.$$

(BARISIEN, J. E., 534.)

(*Tzitzéica*, **94**, 212.)

Équations du quatrième degré. — Propriétés.

205. Si les racines d'une équation du quatrième degré sont de la forme p^2, q^2, p^2+2pq, q^2+2pq, les racines de la dérivée sont rationnelles. (PROUHET, N. A., **327**.)

(*Moreau*, **57**, 39.)

206. Lorsque les coefficients de l'équation générale du quatrième degré

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

ont entre eux la relation

$$ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3=0,$$

c'est-à-dire lorsque l'invariant cubique de la fonction du quatrième degré est nul, l'expression algébrique des racines de l'équation ne contient pas de radical cubique.

(FAURE, N. A., **387**.)

(*Blerzy*, **59**, 420; **64**, 401.)

207. Soient l'équation

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,$$

et s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 les sommes des puissances 0, 1, 2, 3, 4 des racines α, β, γ, δ.

Si l'on a l'une ou l'autre de ces deux relations

$$ae^2-4bd+3c^2=0,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s^2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}=0,$$

alors

$$\sum\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}=0.$$

(STREBOR, N. A., **449**.)

(*Dewulf* et *Martelli*, **60**, 195.)

208. Si l'équation

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 - 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

a une racine double a, posons

$$M = \frac{(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)^3}{(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3)^2};$$

démontrer les équations suivantes

$$a = \frac{\dfrac{dM}{da_0}}{\dfrac{dM}{da_1}} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{dM}{da_1}}{\dfrac{dM}{da_2}} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{dM}{da_2}}{\dfrac{dM}{da_3}} = \frac{\dfrac{dM}{da_3}}{\dfrac{dM}{da_4}}.$$

(M. Roberts, N. A., 526.)

(*Moreau*, **73**, 437.)

209. En ordonnant le discriminant Δ de l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

suivant les puissances de e, posons

$$\Delta = Ae^3 + 3Be^2 + 3Ce + D.$$

Démontrer que l'on a

$$\begin{aligned} &A^2D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^2D - 3B^2C^2 \\ &\quad = -729(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 \\ &\qquad \times (a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^2d - 3b^2c^2)^3. \end{aligned}$$

(M. Roberts, N. A., 606.)

210. L'équation

$$(1) \qquad x^4 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

dans laquelle a, b, c, k sont des entiers plus grands que zéro et satisfaisant aux équations

$$a^2 > k > (a-1)^2, \qquad (a-1)b \geqq (a^2 - k - 1)c$$

ou bien aux conditions

$$(a+1)^2 > k > a^2, \qquad (a+1)b \geqq (k - a^2 + 1)c,$$

ne peut avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.

La même proposition subsiste à l'égard de l'équation

$$(2) \qquad x^4 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

dans laquelle les entiers a, b, c, k, tous plus grands que zéro, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de conditions qui suivent, savoir :

1°
$$a^2 > c, \qquad a^2 > k \geqq (a-1)^2;$$

2°
$$c > a^2 > k, \qquad (a+1)b \geqq (a^2 - k - 1)c;$$

3°
$$(a+1)^2 \geqq k > a^2 > c;$$

4°
$$c > a^2, \qquad k > a^2, \qquad (a-1)b \geqq (k - a^2 + 1)c.$$

Dans chacun de ces cas, disons-nous, l'équation (2) a assurément deux racines réelles, dont l'une au moins est incommensurable. (Realis, N. A., **1354**.)

(*Pecquery*, **81**, 376.)

211. L'équation

$$x^4 + 12\alpha\beta(\alpha + \beta)x + 2\alpha\beta(4\alpha^2 - 9\alpha\beta + 4\beta^2) = 0,$$

dans laquelle α et β sont des entiers différents de zéro, n'a pas de racine entière. (Realis, N. A., **1378**.)

(*Realis*, **82**, 426.)

212. Les longueurs des droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère sont racines de l'équation

$$x^4 - (s^2 + \sigma^2)x^2 + \sigma^2 s^2 + A^2 = 0.$$

A représente l'aire du quadrilatère, s la demi-somme des diagonales, σ leur demi-différence.

Corollaire. — Soient x_1, x_2 les deux racines positives de l'équation; on a

$$x_1^2 + x_2^2 = s^2 \quad + \sigma^2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = s^2\sigma^2 + A^2.$$

(GHYSENS, N. C., **149**.)

(*Freson*, **77**, 51.)

213. p et q étant des nombres entiers, différents de zéro, si l'équation

$$y^4 + 2(2p-1)y^2 + 8qy - (4p-1) = 0$$

a une racine entière, de signe contraire à q, l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

a au moins une racine réelle, incommensurable.

(REALIS, N. C., **219**.)

214. Les équations de la forme

$$x^4 - (\alpha + \beta + 2\gamma)x^3 + (\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 + 3\delta^2)x^2$$
$$-[(\alpha + \beta)(\gamma^2 + 3\delta^2) + 2\alpha\beta\gamma]x + \alpha\beta(\gamma^2 + 3\delta^2) = 0,$$

où α, β, γ, δ sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du quatrième degré ayant une racine entière ou fractionnaire qui puisse être trouvée, par les formules d'Euler, en n'opérant que sur des grandeurs commensurables.

(KUMMER, M., **78**.)

(*Fauquembergue*, **85**, 206.)

215. Pour que l'équation

$$A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_3 z + A_4 = 0$$

puisse prendre la forme

$$\alpha(x + \beta)^4 + \alpha'(x + \beta')^4 = 0,$$

il faut que

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0,$$

et $x+\beta$, $x+\beta'$ sont les facteurs linéaires de

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation générale du quatrième degré. (M., **754**.)

(*Servais*, **93**, 67.)

216. Si l'on cherche toutes les équations du quatrième degré telles que les carrés de leurs racines soient en même temps racines de la même équation, on obtient *seize* équations satisfaisant à cette condition. 1° Former ces équations. 2° Il y en a *dix* dont les coefficients sont réels; démontrer qu'aucune n'est irréductible, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en d'autres équations de degrés moindres; trouver leurs racines. 3° Des *six* équations dont les coefficients sont imaginaires et qui satisfont à la question, il y en a *trois* qui sont les conjuguées des trois autres; démontrer *a priori* qu'il doit en être ainsi.

(J. M., **298**.)

(*Quiquet*, **81**, 328.)

217. On considère l'équation du quatrième degré

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de cette équation.

1° On propose de démontrer que, si l'on pose

$$z=\frac{x_1x_2+x_3x_4}{(x_1+x_2)(x_3+x_4)},$$

l'équation transformée est

$$Pz^3+Qz^2+Rz+S=0,$$

en posant

$$\begin{aligned} P &= BCD-B^2E-D^2A, \\ Q &= 2BCD+4ACE-3B^2E-3D^2A-C^3, \\ R &= BCD+8ACE-3B^2E-3D^2A, \\ S &= 4ACE-B^2E-D^2A. \end{aligned}$$

2° Expliquer le résultat qu'on obtient quand on suppose $C = 0$.

3° Démontrer que, si l'on considère le faisceau quartique

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$

ces quatre droites forment un faisceau harmonique si l'on a

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A.$$

(De Longchamps, J. S., **30**.)

(**83**, 40.)

218. Nous proposons de démontrer avec simplicité et élégance, au moyen des relations entre les coefficients et les racines, que la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0$$

exprime que les racines de l'équation

$$Ax^4 - 4Bx^3 + 6Cx^2 - 4Dx + E = 0$$

sont en proportion harmonique, c'est-à-dire sont liées par la relation

$$2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$$

(J. S., **94**.)

(*Bourgarel*, **84**, 282.)

Équations du cinquième degré.

219. *Équation du cinquième degré.* — Un géomètre anglais vient de démontrer que toute équation de ce degré peut se réduire à la forme

$$x^5 + x + a = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$ (N. A., **41**.)

220. L'équation générale du cinquième degré

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

---

(1) Cet énoncé n'est autre que celui du théorème de Jerrard (*voir* ci-après n° 227).

peut toujours se résoudre algébriquement lorsqu'on a entre les coefficients les relations

$$\frac{d^2 - ce}{b^2 - ac} = \frac{e^2 - df}{c^2 - bd} = \frac{dc - cf}{bc - ad}.$$

(FAURE, N. A., 362.)

(*Prouhet*, **64**, 508.)

221. Soit s_r la somme des puissances r des racines de l'équation

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0.$$

Posons

$$a^6 \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = Pf^2 + 2Qf + R;$$

alors P, Q, R ne renferment pas f. Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

démontrer qu'on a la relation suivante

$$Q^2 - PR = 0.$$

(M. ROBERTS, N. A., **607**).

222. Soient α, β, γ, δ, ε les racines de l'équation

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

Démontrer qu'on a

$$\Sigma(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)(\delta - \varepsilon)^2 = 0.$$

(M. ROBERTS, N. A., **625**.)

223. Démontrer le tableau suivant relatif à la réalité des

racines de l'équation

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0 :$$

$p > 0$ une racine réelle, quatre imaginaires.

$$\left.\begin{array}{r} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} < 0 \end{array}\right\} \text{ cinq racines réelles,}$$

$$\left.\begin{array}{r} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} > 0 \end{array}\right\} \text{ une racine réelle, quatre imaginaires.}$$

(M. Roberts, N. A., **696**.)

(*Boutmy*, **64**, 373, 377.)

224. Soient α, β, γ, δ, ε les racines de l'équation

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

Si l'on a

$$\text{(I)} \quad (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 = 0,$$

démontrer que la racine ε est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation, s'il n'existe qu'un seul groupe de quatre racines qui satisfasse à l'équation (I).

(M. Roberts, N. A., **728**.)

(*Niebylowski*, **66**, 281.)

225. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 désignant les racines, prises dans un ordre quelconque, de l'équation

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx - s = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} x_1^2(x_4x_5 + x_5x_2 + x_2x_3) + x_2^2(x_5x_1 + x_1x_4 + x_3x_4) \\ + x_3^2(x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_5) + x_4^2(x_2x_3 + x_3x_5 + x_5x_1) \\ + x_5^2(x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_2 = -2r. \end{aligned}$$

(Realis, N. A., **788**.)

(*Gayou*, **67**, 37.)

226. Les coefficients de l'équation

$$x^5 + \tfrac{5}{2}(a + b)x^4 + 10p_2x^3 + 10p_3x^2 + 5p_4x + p_5 = 0$$

sont liés par la relation

$$(10-r)p_r = \tfrac{1}{2}(11-2r)(a+b)p_{r-1} + (r-1)abp_{r-2},$$

où l'on suppose $p_0 = 1$ et $a > b$. Montrer que toutes les racines sont réelles et comprises entre $-a$ et $-b$.

(EWARDES, N. A., 1576.)

227. On sait que l'équation générale du cinquième degré,

$$(1) \qquad x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0, \qquad \ldots$$

peut être ramenée à la forme

$$(2) \qquad y^5 + py + q = 0\ (^1), \qquad \ldots.$$

La transformation exige la résolution d'une seule équation du troisième degré. La proposée pouvant admettre cinq racines réelles, et la transformée n'en pouvant admettre que trois, au plus, on demande ce que doivent devenir deux des racines de la proposée. (BROCARD, N. C., 60.)

(*Catalan*, **76**, 342.)

228. Résoudre

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)[2x^3 + (a+b)(a+b-x)^2] \\ = 2(a+b)x[a^2(x+a) + b^2(x+b)].\end{aligned}$$

(SOLLERTINSKY, J. E., 546.)

(*Sollertinsky*, **94**, 256.)

Équations du sixième au huitième degré.

229. Résoudre l'équation

$$u^6 - 6u^4 + au^3 + 9u^2 - 3au + f = 0.$$

(N. A., 246.)

(*Rey*, **52**, 48.)

---

(1) Ce beau théorème est dû à M. Jerrard, géomètre anglais.
(*Note de Catalan.*)

230. Déterminer les six racines rationnelles de cette équation :

$$(a^5 - a)^4(x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x(x-1)^4.$$

(ABEL, N. A., **503**.)

(*De Virieu, Darboux,* **61**, 353, 436.)

231. Résoudre les équations

$$u^6 - 3A^2u^4 + 3A^4(1-\gamma^2)u^2 - A^6(1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 0,$$

$$u^6 - (2A^2 + C^2)u^4 + [2A^2C^2 + A^4(1-\gamma''^2) - 2A^2C^2\gamma^2]u^2 - A^4C^2(1 - \gamma''^2 - 2\gamma^2 + 2\gamma^2\gamma''^2) = 0.$$

(LAMÉ, N. A., **580**.)

(*Jaufroid, Brocard,* **61**, 295; **77**, 477.)

232. Démontrer et généraliser le théorème suivant : Les produits

$$\alpha\alpha,\quad \alpha\beta,\quad \alpha\gamma,\quad \beta\beta,\quad \beta\gamma,\quad \gamma\gamma$$

des racines α, β, γ, prises deux à deux, de l'équation

$$a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$$

sont les racines de l'équation en u

$$\begin{vmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Débarrasser cette équation des racines α^2, β^2, γ^2.

(FARKAS, M., **3**.)

(*Van den Broeck,* **88**, 195.)

233. Résoudre complètement l'équation

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

(CATALAN, M., **682**; J. S., **283**.)

(*J.-G. Darboux,* M., **90**, 150, 155; J. S., **92**, 22.)

234. Établir la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du sixième degré complète pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

(J. M., **263**, **355**.)

(*Quiquet*, J. S., **83**, 94.)

235. Trouver les équations du sixième degré telles que, si x est une quelconque de leurs racines, les autres soient

$$\frac{1}{x_1},\quad -(1+x_1),\quad -\frac{1}{1+x_1},\quad -\frac{x}{1+x_1},\quad -\frac{x_1+1}{x_1}.$$

(WEILL, J. S., **130**.)

(*Bourgarel*, **86**, 287.)

236. Démontrer que l'équation suivante a *sept* racines comprises entre 0 et 1

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0.$$

[GAUSS, N. A., **263** (1).]

(*Koralek*, *Bellavitis*, **53**, 319; **54**, 362.)

237. Résoudre complètement l'équation qui donne les abscisses des points d'inflexion de la courbe représentée par

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \text{ (2)}.$$ (CATALAN, N. C., **129**.)

(*Niewenglowski*, **76**, 365; **77**, 140.)

238. L'équation

$$x^8 - 16x^7 - 60x^6 + 16x^5 + 134x^4 + 16x^3 - 60x^2 - 16x + 1 = 0$$

(1) M. Koralek, habile et expéditif calculateur, a trouvé les six racines irrationnelles avec sept décimales; la septième est 0,5 [*Ann. de Mathém.*, t. XI (novembre 1852)]. (*Note de la Rédaction.*)

(2) Cette équation est $x^4 - 12x^2 + 3 = 0$. (*Note de Catalan.*)

a pour racines

$$\begin{array}{cccc} \tang 3^\circ, & \tang 21^\circ, & \tang 33^\circ, & \tang 39^\circ, \\ \cot 3^\circ, & \cot 21^\circ, & \cot 33^\circ, & \cot 39^\circ; \end{array}$$

et il n'y a pas d'équation plus simple, à coefficients entiers, admettant une de ces racines. (GELIN, N. C., **614**; M., **493**.)

(*Gelin*, M., **88**, 172.)

Équations particulières à résoudre.

239. Trouver les n racines de l'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} - \ldots - a^n = 0.$$

(EULER, N. A., **38**.)

(*Vachette*, **43**, 510.)

240. Trouver les racines de l'équation

$$X_{2p+1} = 0,$$

les fonctions X_n étant définies par la formule

$$X_{n+2} = xX_n - X_{n-2},$$

en supposant

$$X_0 = 1, \qquad X_3 = x - 1.$$

(JAMET, N. C., **601**; M., **671**.)

(*J.-G. Darboux*, M., **90**, 91.)

241. Trouver les racines de l'équation

$$Y_{2p+1} = 0,$$

sachant que

$$Y_{n+2} = xY_n - Y_{n-2}, \qquad Y_1 = 1, \qquad Y_3 = x + 1.$$

(JAMET, N. C., **602**; M., **671**.)

(*J.-G. Darboux*, M., **90**, 91.)

242. Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} ax+b = \sqrt{a^2x^2+b\sqrt{4a^2x^2+abx+b\sqrt{9a^2x^2+2abx}}} \\ +b\sqrt{16a^2x^2+3abx+b\sqrt{\ldots}} \\ +b\sqrt{n^2a^2x^2+(n-1)abx-b\sqrt{(2n+1)a^2x^2+2abx}}, \end{aligned}$$

où chaque radical porte sur toute l'expression qui le suit.

(GELIN, M., **178.**)

(*Polet*, **83**, 140.)

243. Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} (m-n)x+a = \sqrt{2(m-n)(a-nx)+\sqrt{2(m^2-n^2)(a^2-n^2x^2)x^2}} \\ +\sqrt{2(m^4-n^4)(a^4-n^4x^4)x^4+\sqrt{\ldots}} \\ +\sqrt{2(m^p-n^p)(a^p-n^px^p)x^p+2m^pa^px^p}, \end{aligned}$$

où chaque radical porte sur toute l'expression qui le suit, et où $p=2^k$. (GELIN, M., **179.**)

(*Polet*, **83**, 242.)

244. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^2+2\frac{x-a}{x+a}\times\frac{x-b}{x+b}\times\frac{x-c}{x+c}=1$$

(NEUBERG, M., **331.**)

(*Gelin*, **84**, 212.)

245. Trouver toutes les racines de l'équation

$$\begin{aligned} &(x-a-1)(x-a-2)\ldots(x-a-n) \\ &\quad+\frac{n}{1}a(x-a-1)(x-a-1)\ldots(x-a-n+1) \\ &\quad+\frac{n(n-1)}{1-2}a(a-1)(x-a-1)(x-a-2)\ldots \\ &\quad\times(x-a-n+2)+\ldots+a(a-1)\ldots(a-n+1)=0. \end{aligned}$$

(CATALAN, M., **393.**)

(*Cesàro*, **85**, 259.)

246. Résoudre l'équation

$$\sqrt{abx(x-a-b)}+\sqrt{bcx(x-b-c)}+\sqrt{cax(x-a-c)}$$
$$=\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

(GRAM, M., **679**.)

(*De Strékalof*, **90**, 259.)

Équations dont toutes les racines sont réelles.

247. $$\frac{A_1^2}{x-a_1}+\frac{A_2^2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n^2}{x-a_n}-B=0;$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et B sont des quantités réelles. Cette équation a toujours n racines réelles. (N. A., **186**.)

(*Gilles*, **48**, 255.)

248. Soit l'équation

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_{2n-1})$$
$$+b^m(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n})=0;$$

b est un nombre positif; m un nombre entier positif; les $2n-1$ différences a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_4, ..., $a_{2n-1}-a_{2n}$ sont positives; les n racines de l'équation sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, ..., a_5 et a_6, ...

(RICHELOT, N. A., **234**.)

(*Thiollier*, **51**, 280; **71**, 38.)

249. Soit l'équation

$$(x-a_1)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_8)(x-a_9)\ldots(x-a_{4n})$$
$$+b^m(x-a_2)(x-a_3)(x-a_6)(x-a_7)\ldots(x-a_{4n-1})=0;$$

les indices augmentent successivement d'une unité et de trois unités; les différences a_1-a_2, a_2-a_3, ..., $a_{4n-1}-a_{4n}$ sont positives; b est un nombre positif; m est un nombre entier positif; les $2n$ racines sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, ..., a_{4n-1} et a_{4n}. (RICHELOT, N. A., **243**.)

250. Si l'équation

$$\begin{aligned} &Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Dx^p \\ &\quad + Ex^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-5} + \ldots - U = 0 \end{aligned}$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité

$$(1) \qquad (DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

Corollaire I. — Quand la relation (1) n'est pas vérifiée, l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si, entre les coefficients E, F, G qui suivent immédiatement un coefficient nul, on a la relation

$$4EG - 3F^2 \gtreqless 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire III. — Il en est de même si l'on a

$$4DF - 3E^2 \gtreqless 0,$$

D, E, F étant trois coefficients qui précèdent immédiatement un coefficient nul.

Corollaire IV. — Si $E = 0$ et que D, F, G satisfassent à la condition

$$D(DG^2 + 4F^3) \gtreqless 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire V. — Il en est de même si

$$F = 0, \qquad G(D^2G + 4E^3) \gtreqless 0.$$

(CATALAN, N. A., **657**.)

(*Courtin* et *Godard*, **64**, 37, 136.)

251. Si l'on pose

$$\begin{aligned} f_m(x) = 1 &+ \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2 + \ldots \\ &+ \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\right]^2 x^n + \ldots + x^m; \end{aligned}$$

1° Les équations

$$f_1(x)=0, \qquad f_2(x)=0, \qquad \ldots, \qquad f_m(x)=0$$

auront toutes leurs racines réelles et inégales;

2° Les racines de l'équation $f_m(x)=0$ sépareront les racines de l'équation $f_{m+1}(x)=0$. (H. LAURENT, N. A., **869**.)

(*Pellet*, **70**, 420.)

252. En désignant par X_n le polynome de Legendre, on propose de démontrer que l'équation de degré $2n$, savoir

$$n(n+1)X_n^2-(1-x^2)X_n'^2=0,$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (HERMITE, N. A., **890**.)

(*Pellet*, **70**, 329.)

253. Démontrer qu'en développant, suivant les puissances ascendantes de λ, la quantité

$$\frac{1+\frac{\lambda}{1}x+\frac{\lambda^2}{1.2}+\frac{\lambda^3}{1.2.3}x+\frac{\lambda^4}{1.2.3.4}+\ldots}{x+\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda^2}{1.2}x+\frac{\lambda^3}{1.2.3}+\frac{\lambda^4}{1.2.3.4}x+\ldots}=\frac{e^{\lambda(1+x)}+e^{-\lambda(1-x)}}{e^{\lambda(1+x)}-e^{-\lambda(1-x)}},$$

le coefficient de λ^n est un polynome L_n du $n^{\text{ième}}$ degré en x, contenant le facteur x^2-1, et que l'équation

$$\frac{L_n}{x^2-1}=0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (HERMITE, N. A., **925**.)

(*Callandreau*, **72**, 460.)

254. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l}-\frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}a^2x^{n-l-2}$$
$$+\frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}a^4x^{n-l-4}-\ldots=0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$. (Escary, N. A., **1365**.)

255. L'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles; soient α et β deux racines consécutives de cette équation.

La dérivée $f'(x)$ s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β; démontrer que ω est comprise entre

$$\frac{\alpha+(n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha+\beta}{n}$$

n désignant le degré de l'équation. (Laguerre, N. A., **1388**.)

(*Cesàro*, **85**, 328.)

256. Si l'équation de degré n, $f(x)=0$ n'admet que des racines réelles et simples;

1° L'équation $f^2(x)+k^2f'^2(x)=0$, où k est réel, a toutes ses racines imaginaires;

2° Dans chacune de ces racines, la valeur absolue du coefficient de i ne surpasse pas la valeur absolue de kn.

(Laguerre, N. A., **1389**.)

(*Cesàro*, **85**, 321.) (1).

***257**. Considérons l'équation $f(x)=0$ qui a toutes ses racines réelles; k désignant un nombre arbitraire, supposons que l'équation $f(x)+k=0$ ait m racines imaginaires : démontrer que l'équation

$$f'^2(x)-f(x)f''(x)-kf''(x)=0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

(Laguerre, N. A., **1390**.)

***258**. Si l'équation

$$a+bx+cx^2+\ldots+kx^n=0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité

(1) L'énoncé primitif a été légèrement modifié par M. Cesàro; c'est cette modification que nous reproduisons.

réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^4 x^2 + \ldots + k\omega^{n^2} x^n = 0$$

a également ses racines réelles. (LAGUERRE, N. A., **1392**.)

*259. Soit le polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynome un certain nombre de termes de degrés supérieurs à n, on puisse obtenir un autre polynome $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles : démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{1.2.3\ldots n} + \frac{a_1 x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{a_2 x^2}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{a_{n-2} x^{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-1} x}{1} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles. (LAGUERRE, N. A., **1393**.)

260. Former les dérivées successives de la fonction $y = e^{\frac{a}{2}x^2}$.

a. Établir que la dérivée d'ordre n est égale au produit de la fonction elle-même par un polynome entier en x, P_n, du degré n;

b. Démontrer que, entre les divers polynomes P, existent les relations suivantes

$$P_n = P'_{n-1} + axP_{n-1},$$
$$P'_n = naP_{n-1},$$

$$P_{n-1} - axP_n - naP_{n-1} = 0,$$
$$P''_n + axP'_n - naP = 0.$$

c. Démontrer que, si a est négatif, l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles;

d. Former le polynome P_n, en se servant de la troisième relation. (J. M. **307**.)

(*Gilly*, **81**, 473.)

261. On suppose que l'équation $U = 0$ a toutes ses racines

réelles; démontrer que les équations

$$f_1 = U + (x - a)U' = 0,$$
$$f_2 = U + 3(x - a)U' + (x - a)^2 U'' = 0,$$
$$f_3 = U + 7(x - a)U' + 6(x - a)^2 U'' + (x - a)^3 U''' = 0,$$

ont aussi, quel que soit a, toutes leurs racines réelles (a est réel, bien entendu, et U', U'', U''' sont les dérivées successives de U).

Donner l'expression générale de $f_n = 0$, et montrer que, en posant $f_n = \alpha_n^0 U + \alpha_n^1 U' + \alpha_n^2 U + \ldots$, on a

$$\alpha_1^0 = 1,$$
$$\alpha_n^1 = \frac{2^n - 1}{1},$$
$$\alpha_n^2 = \frac{3^n - 2.2^n - 1}{1.2},$$
$$\alpha_n^3 = \frac{4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1}{1.2.3},$$

et ainsi de suite. (De Longchamps, J. S., 54.)

(*Levavasseur*, **83**, 136.)

*262. L'équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles et *de même signe*, démontrer que l'équation

$$a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi + \theta x)$$
$$+ a_2 \cos(\varphi + 2\theta) x^2 + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta) x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, quels que soient les angles φ et θ.

(Laguerre, J. S., 95.)

*263. Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$2a + b(\rho + \rho^{-1})x + c(\rho^{\sqrt{2}} + \rho^{-\sqrt{2}})x^2$$
$$+ d(\rho^{\sqrt{3}} + \rho^{-\sqrt{3}})x^3 + \ldots + k(\rho^{\sqrt{n}} + \rho^{-\sqrt{n}})x^n = 0;$$

ρ désigne une quantité arbitraire. (Laguerre, J. S., 123.)

264. Soit

$$f(x) = 0$$

une équation ayant ses racines réelles et distinctes.

Démontrer que

$$f + A_1 f' + A_2 f'' + \ldots + A_p f^{(p)} = 0$$

a toutes ses racines réelles et distinctes, si

$$Z^p - A_1 Z^{p-1} + A_2 Z^{p-2} + \ldots + (-1)^p A_p = 0$$

a ses racines réelles. (De Longchamps, J. S., **278**.)

(*De Longchamps*, **90**, 87.)

Équations dont toutes les racines sont imaginaires.

265. $F(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales; démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de $[F(x)]^{-1}$, on obtient une équation dont toutes les racines sont imaginaires. (Catalan, N. A., **208**.)

(*Agarrat, Colombier*, **49**, 443; **62**, 244.)

266. Si

$$a_1^2 - a_0 a_2 < 0, \quad a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 > 0,$$

alors les racines de l'équation

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^2 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0$$

sont toutes imaginaires; et sous les mêmes conditions l'équation

$$a_0 x^5 + 5 a_1 x^4 + 10 a_2 x^3 + 10 a_3 x^2 + 5 a_4 x + a_5 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. (M. Roberts, N. A., **695**.)

(*Jaufroid*, **64**, 399.)

267. Supposons que s_0, s_1, ... représentent les sommes des

puissances zéro, première, etc. des racines de l'équation

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} a_2 x^{n-2}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a_3 x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0,$$

alors

$$(n-3)a_0^2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) - 6(n-2)(a_1^2 - a_0 a_2)^2 > 0,$$

et toutes les racines de la dérivée de l'ordre $(n-4)$ de cette équation sont imaginaires. (M. Roberts, N. A., **730**.)

268. Si l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines imaginaires, l'équation

$$f(x) + a f' x + a^2 f''(x) + \ldots + a^m f_m(x) = 0$$

n'aura, elle aussi, que des racines imaginaires.

(Hermite, N. A., **777**.)

(*Graindorge*, **66**, 520; **67**, 21, 416.)

269. Si l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de celle-ci

$$a F(x) + b F'(x) + c F''(x) + \ldots = 0,$$

les constantes a, b, c, ... étant telles que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

n'ait pas de racines imaginaires [1]. (Hermite, N. A., **778**.)

(*Poulain*, **67**, 21, 76, 417.)

270. Supposant toujours que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

---

[1] Cet énoncé figure ici, bien qu'il s'agisse de racines réelles, à cause de sa connexité avec les questions qui le précèdent ou le suivent.

ait toutes ses racines réelles, je fais

$$\frac{1}{a+bz+cz^2+\ldots}=A+Bz+Cz^2+\ldots;$$

cela admis, je dis que, si l'équation $F(x)=0$ a toutes ses racines imaginaires, il en est de même de

$$AF(x)+BF'(x)+CF''(x)+\ldots=0.$$

(HERMITE, N. A., 779.)

(*Poulain*, **67**, 21, 78.)

271. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l}+\frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}a^2x^{-l-2}$$
$$+\frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}a^4x^{n-l-4}+\ldots=0$$

a toutes ses racines imaginaires et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a. (ESCARY, N. A., 1366.)

272. Soit

$$f(x)=A_0x^{2n}+A_1x^{2n-1}+\ldots+A_1x^{2n-1}+\ldots+A_{2n-1}x+A_{2n}.$$

Si les quantités $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots, K_n$, déterminées par les relations

$$K_0=A_0,$$
$$K_1=A_2-\frac{A_1^2}{4K_0},$$
$$K_2=A_4-\frac{A_3^2}{4K_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$K_i=A_{2i}-\frac{A_{2i}^2}{4K_{i-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$K_n=A_{2n}-\frac{A_{2n-1}^2}{4K_{n-1}}$$

sont toutes positives (K_n pouvant être nulle), l'équation

$$f(x) = 0$$

n'a pas de racines réelles.

Même conclusion, en remplaçant les quantités K par les quantités $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$, déterminées par les relations

$$h_0 = A_{2n}, \qquad h_i = A_{2n-2i} - \frac{A^2_{2n-2i+1}}{4h_{i-1}}.$$

Corollaire. — Dans les mêmes circonstances, l'équation

$$x^{2n+1} + f(x) = 0$$

n'a pas de racine positive.

Et, plus généralement, dans les circonstances indiquées, l'équation

$$F(x) + f(x) = 0,$$

dans laquelle $F(x)$ est une fonction entière à coefficients positifs, n'a pas de racine positive. (Realis, N. C., 479.)

Équations ayant un nombre limité de racines réelles.

273. L'équation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (Sylvester, N. A., 775.)

(*Graindorge*, **66**, 520; **67**, 416.)

274. L'équation

$$1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}x^n = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles, quand γ est > 0, et $< -n$. (Sylvester, N. A., 776.).

(*Graindorge*, **66**, 520.)

275. L'équation

$$a\left(1+x+\frac{x^3}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$+b\left(1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}\right)+c=0$$

ne peut avoir plus de deux racines réelles [1].

(SYLVESTER, M., **676**.)

***276.** En multipliant $(x^2-1)^n$ par la série

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^3}+\ldots,$$

la partie entière du produit sera le polynome

$$F(x)=x^{2n-1}-\left(n-\frac{1}{3}\right)x^{2n-3}+\left[\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n}{3}+\frac{1}{5}\right]x^{2n-5}-\ldots,$$

à l'égard duquel on propose de démontrer :

1° Que l'équation $F(x)=0$ a toutes ses racines imaginaires, sauf la racine $x=0$, quand le nombre n est pair;

2° Qu'en supposant n impair, elle n'admet, outre la racine nulle, que deux racines réelles égales et de signes contraires, dont la valeur absolue, supérieure à l'unité, est moindre que $\sqrt{2}$ et converge vers cette limite lorsque le nombre n augmente.

(HERMITE, N. A., **936**.)

(*Callandreau*, **94**, 49*.)

277. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1x^n+A_2x^{n-1}+\ldots+A_mx^{n-m+1}+\ldots+A_nx+A_{n+1}=0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A_m=\frac{a^m-b^m}{a-b},$$

---

[1] L'énoncé n'est pas exact. *Voir* une Note : C.-A. LAISANT, **91**, 98. Nous le conservons néanmoins parce que la question peut provoquer encore des recherches intéressantes. A rapprocher des deux questions qui précèdent.

on a, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = n$ inclusivement,

$$S_m = -(a^m + b^m).$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles. (REALIS, N. A., 999.)

278. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^n + ax^{n-1} + \frac{a(a+1)}{2}x^{n-2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3}x^{n-3} + \ldots$$
$$+ \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)}{2.3.4\ldots n} = 0,$$

on a

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \ldots = S_2 = S_1 = -a,$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{2.3.4\ldots n} - a.$$

On déduit de là que, a étant positif, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec l'énoncé de la question 776 (n° 274 ci-dessus).

Note. — Pour l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \frac{x^{n-2}}{1.2} + \frac{x^{n-3}}{1.2.3} + \ldots + \frac{x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

on a évidemment

$$S_2 = S_3 = S_4 = \ldots = S_{n-1} = S_n = 0,$$

et l'on reconnaît de même que l'équation ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec la question 775 [1].

(REALIS, N. A., 1000.)

279. L'équation

$$Kx^m + \frac{x^{m-1}}{1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \frac{x^{m-3}}{3} + \frac{x^{m-p}}{p} + \ldots + \frac{1}{m} = 0$$

---

[1] Énoncé n° 273 ci-dessus.

a une seule racine réelle pour m impair. Si m est pair, elle a deux racines réelles au plus.

Trouver la condition pour que ces deux racines existent [1].

(H. LAURENT, J. M., **211**.)

(*Coignard*, **80**, 188.)

280. L'équation

$$a^p x^n + b^p x^{n-1} + \ldots + l^p = 0,$$

dans laquelle p désigne un nombre entier, a, b, ..., l étant les termes consécutifs d'une progression arithmétique, a au plus $p+1$ racines réelles. (DELENS, J. S., 363.)

Équations ayant des racines imaginaires.

281. L'équation

$$c_0 x^n + \frac{n}{1} c_1 x^{n-1} + \frac{n.n-1}{2} c_2 x^{n-2} + \ldots + n_1 c_{n-1} x + c_n = 0$$

a *au moins* autant de racines imaginaires qu'on trouve de variations de signes dans la suite

$$c_0^2, \quad c_1^2 - c_0 c_2, \quad c_2^2 - c_1 c_3 \ldots, \quad c^2 - c_{n-2} c_n, \quad c_n^2.$$

(NEWTON.)

Nota. — La démonstration d'Euler (*Introduction au Calcul infinitésimal*) n'est pas satisfaisante. (GENOCCHI, N. A., **434**.)

282. Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Si

$$(n-1) a_1^2 - (n+2) a_2 < 0,$$

l'équation a *au moins* un couple de racines imaginaires.

(TŒPLITZ, N. A., **463**.)

(*Brault*, **59**, 217.)

---

[1] Énoncé légèrement modifié, d'après une rectification indiquée dans la solution de M. Coignard.

283. Une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

dans laquelle f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. (FAURE, N. A., **711**.)

(*De Virieu*, **65**, 79.)

284. 1° Si une équation $f(x) = 0$ est ordonnée et de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi(x) = 0,$$

φ et ψ n'ayant que des permanences et α, β, γ étant des nombres positifs tels que $\beta^2 = \alpha\gamma$, l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2° Si quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $b + c$, b, c, $b - c$, de sorte que

$$f(x) = \ldots (b+c)x^{p+1} + bx^p + cx^{p-1} + (b-c)x^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont a, b, a, b, de telle sorte que

$$f(x) = \ldots ax^{p+1} + bx^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a au moins deux racines imaginaires. On propose de généraliser cette proposition et de faire voir que, si trois coefficients consécutifs a, b, c se reproduisent trois fois périodiquement, de telle sorte que l'on trouve dans l'équation a, b, c; a, b, c; a, b, c comme étant 9 coefficients consécutifs, l'équation a, au moins, quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

En supposant que les coefficients a_1, a_2, ..., a_p se reproduisent p fois périodiquement, dire combien l'équation a au moins de racines imaginaires. On distinguera les cas de p pair et de p impair. (DE LONGCHAMPS, N. A., **1367**.)

(*Moret-Blanc*, **82**, 368.)

285. Soit l'équation à coefficients positifs,

$$x - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \ldots = 0;$$

il y aura des racines imaginaires si l'une des conditions suivantes est remplie

$$b > \frac{m-1}{1.2.m} a^2,$$

$$c > \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.m^2} a^3.$$

(H. LAURENT, J. M., **213**.)

(*Liégeois*, **81**, 86.)

286. Si, dans une équation, A, B, C, D désignent quatre coefficients positifs, ou tels tout au moins que AC soit positif, si l'on a BC = AD, l'équation proposée a des racines imaginaires.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **6**.)

(*Ferval*, **83**, 190.)

287. Lorsque les trois premiers coefficients d'une équation de degré m sont 1, p, $\frac{p(p+1)}{2}$, l'équation a des racines imaginaires. (DE LONGCHAMPS, J. S., **46**.)

(*Genin*, **83**, 135.)

288. Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont

$$A, \quad B, \quad C, \quad 2B - A, \quad 2C - B,$$

l'équation a des racines imaginaires. (DE LONGCHAMPS, J. S., **47**.)

(*Ferval*, **83**, 190.)

289. Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont

$$+3A, \quad -A, \quad -A, \quad +3A,$$

l'équation a des racines imaginaires.

(DE LONGCHAMPS, J. S., **48**.)

(*Ferval*, **83**, 191.)

Racines réelles ou imaginaires. — Autres questions.

290. Une équation ayant m racines réelles, si l'on en retranche l'équation dérivée, le reste égalé à zéro aura au moins $m-1$ racines réelles. (TERQUEM, N. A., 58.)

(*Yvon*, **43**, 319.)

291. Soient m un nombre pair et l'équation

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x + A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des nombres positifs.

Soient H le plus grand des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \quad \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

et h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_6}{A_5}, \quad \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}};$$

l'équation proposée aura toutes ses racines comprises entre H et h si l'on a $H > h$, et toutes ses racines imaginaires si l'on a $H = h$ ou $< h$. (PROUHET, N. A., 780.)

(*Laisant*, **67**, 34.)

292. Soient m un nombre impair et l'équation

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_{m-1} x - A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sont des nombres positifs.

Soient H le plus grand et H′ le plus petit des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \quad \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

Soit h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \quad \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}};$$

l'équation n'a aucune racine supérieure à H, ni inférieure à H', et en outre elle ne peut en avoir qu'une seule inférieure à $\frac{h}{2}$. Il en résulte que, si $H = \frac{h}{2}$ ou $< \frac{h}{2}$, l'équation n'aura qu'une racine réelle [1]. (PROUHET, N. A., 781.)

(*Laisant*, **67**, 35.)

293. $U = 0$ étant une équation algébrique, U_1, U_2, ..., U_n, ... les dérivées successives du premier membre :

1° L'équation $U = 0$ aura des racines imaginaires, si l'on n'a pas, pour toutes les valeurs de n et de x,

$$\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\frac{U_{n-1}.U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)} + 2\frac{U_{n-2}.U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)} - 2\frac{U_{n-3}.U_{n+3}}{1.2\ldots(n-3).1.2\ldots(n-3)} + \ldots > 0,$$

l'existence d'un couple de racines imaginaires étant accusée, chaque fois que l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de l'inégalité précédente n'a pas toutes ses racines imaginaires.

2° Le même théorème subsistera si l'on remplace les dérivées U_1, U_2, ... par les dérivées de la fonction suivante,

$$V = U + A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_m,$$

formée au moyen des coefficients d'une équation à racines toutes réelles,

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots \pm A_m = 0,$$

d'un degré égal ou inférieur au degré de $U = 0$.

(J.-J.-A. MATHIEU, N. A., **808**.)

(*Pellet*, **67**, 517.)

---

[1] Énoncé rectifié, d'après la solution.

294. I. Si l'équation

$$(1)\quad x^m - \frac{m}{1} A_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} A_2 x^{m-2} - \ldots \pm m A_{m-1} x \pm A_m = 0$$

a toutes ses racines positives, $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ vérifient les inégalités

$$(2)\quad A_1^2 > A_2,\quad A_2^3 > A_3^2,\quad A_3^4 > A_4^3,\quad \ldots,\quad A_{m-1}^m > A_m^{m-1},\quad \ldots.$$

Corollaire. — Si quelqu'une des inégalités (2) n'est pas vérifiée, l'équation (1) a des racines imaginaires [1].

II. L'équation (1) a, au moins, autant de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la suite des m quantités.

$$A_1^2 - A_2,\quad A_2^3 - A_3^2,\quad A_3^4 - A_4^3,\quad \ldots,\quad A_{m-1}^m - A_m^{m-1},\quad A_m.$$

(Realis, N. C., **147**.)

295. a et b étant deux quantités réelles, on considère la fonction

$$y = (x-a)^m (x-b)^m;$$

on demande combien l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée $m^{\text{ième}}$ de y a de racines réelles. (J. M., **308**.)

(*Tranié*, **81**, 384.)

296. L'équation

$$A x^m + m B x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} A x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} B x^{m-3} + f_{m-4}(x) = 0,$$

---

[1] Le théorème I a une grande analogie avec l'un de ceux que nous avons publiés, autrefois, dans les *Comptes rendus*, puis dans le *Cours d'analyse de l'Université de Liége;* cependant il n'y a pas identité. En effet, d'après ce dernier théorème, si toutes les racines de l'équation (1) sont positives, on a

$$(3)\quad A_1^m > A_m,\quad A_2^m > A_m^2,\quad A_3^m > A_m^3,\quad \ldots,\quad A_{m-1}^m > A_m^{m-1},\quad \ldots.$$

Or, comme il est facile de le prouver, les inégalités (3) résultent des inégalités (2); mais la réciproque n'est pas vraie. (*Note de Catalan.*)

dans laquelle $f_{n-1}(x)$ désigne une fonction entière, quelconque, du degré $m-1$, a, au moins, deux racines imaginaires.

DE LONGCHAMPS, J. S., 286.

Formes algébriques. — Invariants. — Fonctions symétriques.

297. Étant donnée une fonction homogène complète de degré p entre n variables, racines d'une équation de degré n également donnée, les coefficients numériques de la fonction étant tous égaux à l'unité, trouver la valeur de la fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation.

Brioschi, 57, 218, 4.6. WRONSKI, N. A., 350.

298. En adoptant la notation bien commode de M. Cayley, posons l'équation

$$a, b, c, d, e, f, g, \ldots, x, 1 \; (\;)^n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Démontrer les formules suivantes

$$\begin{aligned}
&2a^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 \\
&= n^2 (n-1)(n-2) \times \left[n^2 b^2 - ac^2 - \frac{n-3}{6} a^2 (ae - 4bd - 3c^2) \right], \\
&2a^2 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_5 - x_6)^2 \\
&= n^2 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \times \left[b^2 - ac^2 - \frac{n^2}{2} a^2 - 5n - 8 a^2 \right. \\
&\quad \times (b^2 - ac^2 - ae - 4bd - 3c^2) \\
&\quad - \frac{n}{2} (7n - 15) a^2 (ad^2 - 2b^2 - c^2 - 2bcd - ae) \\
&\quad - \frac{n-3}{6} \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{60} (ag - 15ec - 10d^2 - 6bf).
\end{aligned}$$

Il est très digne de remarque que la quantité

$$ag - 15ec - 10d^2 - 6bf$$

est un invariant pour les fonctions homogènes à deux variables du sixième degré. MICHAEL ROBERTS.

Note du Rédacteur. — La fonction homogène à deux variables de degré n peut évidemment s'écrire sous la forme

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n.n-1}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a_3 x^3 y^3 + \ldots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = \mathrm{F}.$$

C'est cette forme que M. Cayley représente d'une manière si expressive et si mnémonique par

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

Si l'on fait

$$y = 1,$$

on a une expression à une variable; le révérend M. Roberts a remplacé a_0, a_1, a_2, ... par a, b, c, d.

Covariants et invariants. — Si dans la fonction F on remplace x par $\lambda x + \mu y$ et y par $\lambda' x + \mu' y$, il est clair que la fonction garde encore la forme

$$(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)(x, y)^n,$$

où les a' sont des fonctions des a et des quatre constantes λ, μ, λ', μ'.

Soient

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y)$$

une fonction quelconque des a et de x, y, et

$$\varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, x, y)$$

la fonction analogue en a' et x, y; mais les a' étant des fonctions des a, il s'ensuit que cette dernière fonction est aussi une fonction des a.

Si la fonction φ est prise de telle manière que l'on ait l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots. a'_n, x, y),$$

où p est un nombre entier positif, alors la fonction φ est dite *covariant* de F.

Si l'on avait simplement la fonction

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sans x et sans y et qu'on eût l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n),$$

alors φ serait un *invariant* de la fonction F.

Exemple. — Soient

$$n = 3,$$

$$F = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3,$$

$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1;$$

on trouve

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0, \\ a'_1 &= a_1 + a_0 \mu, \\ a'_2 &= a_2 + 2a_1 \mu + a_0 \mu^2, \\ a'_3 &= a_3 + 3a_2 \mu + 3a_1 \mu^2 + a_0 \mu^3. \end{aligned}$$

Prenons

$$\varphi = (a_1^2 - a_0 a_2) x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) xy + (a_2^2 - a_1 a_3) y^2;$$

désignons par Φ la fonction analogue en a'; si l'on y remplace ensuite les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$p = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi = \Phi.$$

Cette fonction φ jouit donc de la propriété qui la rend un *covariant* de F.

Soient

$$n = 2,$$

$$F = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2;$$

alors

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda\lambda' + a_2 \lambda'^2, \\ a'_1 &= a_0 \lambda\mu + a_1(\lambda\mu' + \lambda'\mu + a_2 \lambda'\mu'), \\ a'_2 &= a_0 \mu^2 + 2a_1 \mu\mu' + a_2 \mu'^2. \end{aligned}$$

Prenons

$$\varphi = a_1^2 - a_0 a_2,$$

sans x, y; alors

$$\Phi = a_1'^2 - a'_0 a'_2,$$

et remplaçant les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$\Phi = (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2\varphi,$$

et φ est un *invariant* de F; si

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1,$$

alors

$$\Phi = \varphi$$

(*voir* la Note de M. Combescure, p. 193, de la *Théorie des déterminants*). (N. A., **412**.)

(*Blerzy*, **59**, 420; **61**, 120.)

***299**. Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$f(x) = 0,$$

que nous écrivons sous la forme maintenant bien connue

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0;$$

posons

$$A_m = a_0^{2n-4} \sum \frac{x_1^m f'(x_2) f(x_3) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' est la dérivée de f; démontrer que la forme

$$(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

(M. Roberts, N. A., **525**.)

300. On sait que toutes les valeurs de λ sont réelles lorsque l'une au moins des formes f ou φ est la somme de trois carrés, de même signe. On demande, dans ce cas, de séparer les trois racines de l'équation en λ. (Amigues, J. S., **299**.)

301. f et φ étant deux formes quadratiques ternaires et à coefficients réels, si l'on égale à zéro le discriminant de la forme

$$f + \lambda\varphi,$$

on obtient l'équation $R(\lambda) = 0$. Démontrer *algébriquement* que les racines réelles de cette équation, qui donnent pour $f + \lambda\varphi$ une somme de deux carrés de même signe, sont nécessairement en nombre pair. (AMIGUES, J. S., **300**.)

Transformation des équations.

302. En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_2 + x)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (a_n + x)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

on parvient à une équation du degré 2^{n-2}. (N. A., **127**.)

(*Brisse*, **81**, 329.)

303. En calculant la valeur algébrique du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \frac{n.n-1}{1.2}t & \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^2 & \ldots & nt^{n-2} & t^{n-1} \\ \frac{n.n-1}{1.2}t & \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^2 & \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}t^3 & \ldots & t^{n-1} & n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t^{n-1} & n & \frac{n.n-1}{1.2}t & \ldots & n-1\,t^{n-3} & nt^{n-2} \end{vmatrix},$$

les puissances impaires de t disparaissent et, en posant $t^2 = u$, l'équation $\Delta = 0$ est l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

(M. ROBERTS, N. A., **581**.)

(*Beltrami*, **64**, 64.)

304. Étant donnée une équation réciproque $f(x) = 0$, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en z, obtenue en posant

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

soit elle-même réciproque? (N. A., **773**.)

(*Giard*, **67**, 126.)

305. 1° Les équations réciproques telles que, en posant

$$2t = x + \frac{1}{x},$$

leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène de $(x+1)^4$ et $(x-1)^4$.

On suppose que l'équation primitive n'admet pas pour racine $+1$ ou -1.

2° Les équations réciproques telles que, en posant

$$x + \frac{1}{x} = t,$$

leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n(x^2-x+1)^{n'}F[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène des quantités $(x^2+x+1)^2$, $(x^2-x+1)^2$ (1).

(PELLET, N. A., **1364**.)

306. Si les racines d'une équation, de degré pair $2m$, peuvent se partager en m groupes de deux racines x_1, x_2 satisfaisant à la relation

$$ax_1x_2 + b(x_1+x_2) + c = 0,$$

on peut, par une substitution linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, amener l'équation à n'avoir que des termes de degré pair en y.

(PELLET, N. A., **1405**.)

(*Fauquembergue*, **84**, 386.)

---

(1) Énoncé rectifié par l'auteur de la question (**81**, 528); il fait connaître en même temps que cette question a été résolue, dans le *Bulletin mensuel de l'Académie de Clermont* (mars 1881), par M. Paul.

307. Démontrer que les seules racines réelles de l'équation

$$(1) \qquad (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0$$

sont

$$0, \quad -1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}. \quad \text{(N. C., 38.)}$$

(*Catalan*, **77**, 83.)

308. Dans la question précédente, former l'équation qui n'admet que les racines imaginaires de la proposée, c'est-à-dire trouver le quotient Q de

$$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

par

$$x(x+1)(2x+1)\,(^1). \quad \text{(N. C., 39.)}$$

(*Catalan*, **77**, 84.)

309. Prouver que, si l'on fait $y = 2x + 1$, la transformée de l'équation réduite, dans les deux questions précédentes, est

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 y^{2n-4} + (C_1 + C_3) y^{2n-6} + (C_1 + C_3 + C_5) y^{2n-8} + \ldots \\ \qquad\qquad + (C_1 + C_3 + \ldots + C_{2n-3}) y^0 = 0, \ \ldots. \end{array} \right.$$

Dans celle-ci

$$C_1 = \frac{2n}{1}, \qquad C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}, \qquad \ldots.$$

(CATALAN, N. C., **40.**)

(*Catalan*, **77**, 85.)

310. Discuter le nombre de racines réelles comprises entre a et b, au moyen de la substitution

$$y = \frac{b-x}{x-a}. \quad \text{(JACOBI, N. C., 333.)}$$

(*Laisant*, **79**, 23.)

---

(1) Afin d'engager nos jeunes lecteurs à effectuer cette division, nous leur indiquons le résultat du calcul

$$\begin{aligned} Q = {} & (x+1)^{2n-4} + (x+1)^{2n-5} + (x+1)^{2n-6} + \ldots + (x+1) + 1 \\ & + x[(x+1)^{2n-4} - (x+1)^{2n-5} + x^2(x+1)^{2n-4} - \ldots - x^{2n-5}(x+1)x^{2n-4}] \\ & - x^{2n-3} + x^{2n-5} + \ldots - x + 1. \end{aligned}$$

(*Note de la Rédaction.*)

311. Si l'on fait $x + \frac{1}{x} = z$, la *réduite* de

$$x^{2n} + x^{2n-2} + \ldots + x^2 + 1 = 0$$

est

$$z^n - \frac{n-1}{1} z^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} z^{n-4} - \ldots = 0.$$

(CATALAN, M., **508.**)

(*Durfee*, **89**, 196.)

Équations algébriques; autres questions.

312. Étant donnée une équation algébrique, d'un degré quelconque, à coefficients réels, chaque racine peut être considérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire, l'unité étant prise pour rayon.

On propose : 1° de démontrer que la somme de ces arcs est réelle; 2° de trouver cette somme à l'aide des tables.

(N. A., **5.**)

(*Terquem*, **42**, 145.)

313. Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation est limité, et le coefficient du second terme un nombre négatif quelconque, on sait que, pour obtenir une limite supérieure des racines positives de l'équation, il suffit d'ajouter l'unité à la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs de cette équation; c'est la règle indiquée par *Maclaurin*. Mais, dans un grand nombre de cas, on aura, en fonction des coefficients, l'expression d'une limite supérieure plus approchée au moyen de la règle suivante, énoncée par *Lagrange*.

Soient $-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}$, ... les termes négatifs de l'équation proposée, dont le degré est m; on aura une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités

$$\sqrt[n]{A}, \quad \sqrt[r]{B}, \quad \sqrt[s]{C}, \quad \ldots.$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit

$$x^3 - x + x - 1000 = 0.$$

La règle de *Maclaurin* donne pour limite supérieure 1001, et celle de *Lagrange* donne 11. Ce dernier nombre est la plus petite limite supérieure, entière. (N. A., 6.)

(*Pury*, **42**, 243.)

314. Soient $F(x)$ une fonction entière en x; a, b deux nombres *positifs* et $b > a$; si $\frac{F'(a)}{F'(b)} > 0$ et $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$, il y aura *au moins* deux racines de $F'(x)$ comprises entre a et b.

(PROUHET, N. A., 89.)

(*Jullien*, **51**, 144.)

315. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $x^n(x-1)^n = 0$, et démontrer que cette dérivée a n racines comprises entre 0 et 1.

(GAUSS, N. A., **191**.)

(*Emery*, **49**, 45.)

316. Trouver le coefficient de x^{n-1} dans l'équation en x de degré $n+1$, qui a pour racines les $n+1$ coefficients binomiaux de $(a+b)^n$. (N. A., **290**.)

(*Faure, Sacchi*, **55**, 198; **57**, 369.)

317. Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q,$$

faisant

$$h = \frac{q - (\varphi)(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)},$$

$t + h$ sera une valeur approchée de x comprise entre t et $t+1$; discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.

(N. A., **325**.)

(*Brocard*, **76**, 328; N. C., **76**, 176.)

318. $f(x)=0$ est une équation algébrique à coefficients *entiers;* si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a aucune racine *entière.* (GAUSS, N. A., **345**.)

(*De Rochas,* **57**, 9,10, 71.)

319. Soient les équations

$$x^3 - p\,x^2 + q\,x - r = 0 \qquad (\text{racines } \alpha,\ \alpha',\ \alpha''),$$
$$x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \qquad (\text{racines } \beta,\ \beta',\ \beta''),$$

et posons

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$
$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en t

$$t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q')]^2 - \frac{1}{16}\left(\sqrt{\Delta}\,\frac{d\Delta'}{dr'} \pm \sqrt{\Delta'}\,\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 = 0$$

a pour racines les quantités

$$D_1^2,\quad D_2^2,\quad D_3^2,\quad D_4^2,\quad D_5^2,\quad D_6^2.$$

(M. ROBERTS, N. A., **351**.)

(*Del Beccaro,* **59**, 73.)

320. Si l'équation

(1) $$f(x) = 0$$

est de degré *pair* et si ses racines peuvent se partager en couples donnant la même somme $2s$, l'équation

(2) $$f'(x) = 0$$

admettra la racine s et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \qquad f'''(x) = 0, \qquad f^{v}(x) = 0, \qquad \ldots$$

et dans le second, les équations

$$f(x) = 0, \qquad f''(x) = 0, \qquad f^{iv}(x) = 0, \qquad \ldots$$

auront en commun la racine s. (PROUHET, N. A., **392**.)

(*Chanson*, **57**, 456; **58**, 156.)

321. Discuter la fonction

$$y = \frac{(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2}{1 + x + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}.$$

En égalant à zéro la dérivée de y, on trouve l'équation

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} - (n+1)x^n = 0;$$

trouver les racines réelles de cette équation.

x étant supposé compris entre $+1$ et -1 développer y en série ordonnée suivant les puissances de x.

(CATALAN, N. A., **642**.)

(*Geoffroy* et *Lhuillier*, **63**, 337.)

322. Étant donnée la série

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots,$$

convergente pour une valeur finie quelconque réelle ou imaginaire de z, on pose l'équation

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = A,$$

A étant un nombre donné.

Démontrer que la différence entre deux racines quelconques z_1

et z_2 de cette équation est supérieure à une quantité fixe qui dépend de A et des coefficients C_0, C_1, C_2, ...

(PICCIOLI, N. A., 947.)

323. Trouver la somme des puissances semblables des racines de l'équation trinome

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

lorsque l'exposant t est un multiple de n.

(PELLET, N. A., **1278**.)

(*Fauquembergue*, **79**, 376.)

***324.** $f(x)$ désignant un polynome à coefficients réels, on peut toujours déterminer un nombre positif ω, tel que le développement de $e^{\omega x} f(x)$, suivant les puissances croissantes de x, présente précisément autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines positives. (LAGUERRE, N. A., **1394**.)

325. Soit une équation algébrique de degré m ayant pour racines des quantités réelles ou imaginaires représentées par des points A_1, A_2, ..., A_m. Pour qu'un point P soit racine de l'équation dérivée, il faut et il suffit que les points A'_1, A'_2, ..., A'_m, inverses des points racines par rapport au point P, admettent ce dernier comme centre des moyennes distances.

(On sait que l'inverse A'_1 d'un point A_1 par rapport à P est un point situé sur la droite PA_1 à une distance PA'_1, inverse de PA_1.)

N. B. — Le théorème peut être déduit d'une remarque généralement attribuée à Chasles sur les positions d'équilibre d'un point attiré par des centres fixes en raison inverse de la distance, question qui a été étudiée en détail par M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 2e semestre 1868). On en conclut l'importante conséquence suivante due également à M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 1er semestre 1888) :

Les racines de la dérivée sont situées à l'intérieur de tout polygone convexe entourant les racines de la proposée.

(APPELL, N. A., **1627**.)

(*Audibert*, **92**, 26*.)

326. Former le premier membre de l'équation ayant pour racines

$$x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \ldots}}}.$$

(Ed. Lucas, N. C., **142**.)

(*Realis, Ed. Lucas,* **77**, 193, 315, 384.)

327. Discuter l'équation

$$x^{2n} - 1 + a(x^{2n-1} - x) = 0.$$

(Catalan, N. C., **179**.)

328. Dans le tableau du calcul des racines entières d'une équation numérique, comment trouve-t-on immédiatement le quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, a et b désignant deux racines entières? (Ed. Lucas, N. C., **197**.)

(*Freson,* **77**, 121.)

329. Si les racines d'une équation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = 0$$

sont en progression arithmétique, les deux racines extrêmes sont données par l'équation

$$\frac{(nx + A)^2(n+1)}{3(n-1)} = (n-1)A^2 - 2nB.$$

(Gatti, N. C., **264**.)

(*Realis,* **77**, 362.)

***330.** La plus petite racine positive de l'équation

$$A_0 x^n + \ldots + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

est limite inférieure des racines positives de l'équation

$$\frac{ah+1}{a(a-1)} A_0 x^n + \ldots$$
$$+ \frac{(a-i)h+1}{(a-i)(a-i-1)} A_i x^{n-i} + \ldots + \frac{(a-n)h+1}{(a-n)(a-n-1)} = 0,$$

dans laquelle h est une quantité non comprise entre o et -1, et a, un nombre supérieur à $n+1$. (REALIS, N. C., **361**.)

331. m et b désignant des constantes, on demande une valeur de x vérifiant l'équation

$$x^m - x + \frac{b-1}{b\sqrt[m-1]{b}} = 0.$$

(BROCARD, N. C., **403**.)

(*Cesàro*, **78**, 365.)

332. Si les équations

$$f(x) - x = 0, \qquad f[f(x)] - x = 0$$

ont une racine commune qui soit racine simple de la première et racine multiple de la seconde, l'ordre de multiplicité est impair. (MOUTARD, M., **519**.)

(*Soons, Lemoine*, **92**, 47, 276.)

333. Trouver pour A et B des valeurs entières telles que les racines des deux équations

$$x^2 + Ax + B = 0, \qquad x^2 + Ax - B = 0$$

soient à la fois rationnelles. (MACKENZIE, M., **927**.)

Équations transcendantes.

334. Démontrer que l'équation $\frac{9\sin x}{5+4\cos x} = x$ n'a pas de racine réelle positive supérieure à 3, et n'a qu'une racine positive comprise entre 2 et 3. (CAUCHY, N. A., **37**.)

(*Brocard*, **74**, 238.)

335. Combien l'équation transcendante $2(1-\cos x) = x\sin x$ admet-elle de racines positives? (N. A., **49**.)

(*Roche*, **43**, 244.)

336. Étant données la longueur d'un arc de cercle et celle de sa corde, déterminer le rayon. (VINCENT, N. A., **172**.)

(*Lafonge*, **48**, 103.)

337. Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$x^y = y^x. \quad \text{(GOLDBACH, N. A., 235.)}$$

(*Lecointe*, **52**, 187.)

338. Résoudre l'équation $3^x = 54x - 135$ [1].

(N. A., **247**.)

(*Bugnot*, **51**, 461.)

339. Soit donnée l'équation

$$x^{2m+1} + ax^{2m-1} + bx^{2m-3} + \ldots + lx + k = 0$$

qui ne renferme que des puissances impaires de l'inconnue (excepté x^0); il y a une racine réelle comprise entre

$$2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}} \quad \text{et} \quad -2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}} \text{ [2]}.$$

(TCHEBICHEF, N. A., **347**, **516**.)

(*De Foville, Realis*, **58**, 326; **63**, 320.)

340. 1° Discuter la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad y = \sin[(2n+1)\arcsin x] + 1.$$

2° Démontrer que, si $\varphi(x)$ est une fonction impaire [3] qui n'a pas plus de $2n-1$ racines comprises entre $+1$ et -1, la

---

[1] Les équations de cette forme ont toujours deux racines réelles. (*D. Bernoulli.*)

[2] Bien que se rapportant à une équation algébrique, cette question a été placée ici à cause de sa connexité avec la suivante.

[3] On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ est impaire lorsqu'on a

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

(*Note de Prouhet.*)

courbe représentée par l'équation

$$(2) \qquad y = \varphi(x)$$

rencontre la courbe (1) au moins en un point dont l'abscisse est comprise entre $+1$ et -1.

3° Déduire de ce qui précède la démonstration du théorème de M. Tchebichef [1] (question 347). (PROUHET, N. A., 356.)

(*De Foville*, **58**, 326.)

341. $xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = b$:

$$e = \text{base népérienne},$$
$$a = \sin\psi, \quad \psi < 90^\circ;$$

démontrer qu'en posant

$$b = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\, e^{\cos\psi},$$

l'équation transcendante a deux racines égales; de même en posant

$$b = \cot\frac{\psi}{2}\, e^{-\cos\psi}. \quad \text{(PUISEUX, N. A., 514.)}$$

(*Gressier*, **60**, 230.)

342. Discuter et résoudre l'équation

$$4x\cos x + (3x^2 - 4)\sin x = 0.$$

(VECCHIO, N. C., 245.)

Systèmes d'équations; résolutions.

343. On propose de résoudre les équations

$$zy - r^2 = A, \qquad xz - s^2 = B, \qquad xy - t^2 = C$$
$$st - rx = D, \qquad tr - sy = E, \qquad rs - zt = F.$$

(J. CH. DUPAIN, N. A., 1253; J. S., 166, 184.) [1].

(*Gambey*, N. A., **78**, 234; *Beyens*, J. S., **88**, 22.)

---

[1] *Voir* l'énoncé précédent.

[1] Aux notations près, la même question a été posée deux fois dans le

344. Résoudre le système des deux équations

$$\sin^n x \sqrt{1 - \sin^{2n} y} = a,$$
$$\sin^n y \sqrt{1 - \sin^{2n} x} = b,$$

et donner l'interprétation géométrique des premiers membres des équations que l'on obtient, en éliminant tour à tour $\sin y$ et $\sin x$. (Escary, N. A., **1430**.)

345. Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = a, \qquad x + v + w = b, \qquad y + w + u = c,$$
$$z + u + v = d, \qquad xu = yv = zw.$$

(Neuberg, M., **319**.)

(*Falisse*, **85**, 278.)

346. Résoudre le système d'équations suivant, où $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_1 C_{n+i}^1 + x_2 C_{n+i}^2 + \ldots + x_n C_{n+i}^n = 1;$$

C_p^r désigne le nombre de combinaisons de p objets, r à r.

(M., **499**.)

(*Cesàro*, **87**, 177.)

347. Résoudre le système

$$\frac{x-y}{y^3} + \frac{x-z}{z^3} = ax, \quad \frac{y-x}{x^3} + \frac{y-z}{z^3} = by, \quad \frac{z-x}{x^3} + \frac{z-y}{y^3} = cz.$$

(Dawson, M., **533**.)

(*Cesàro*, **86**, 263.)

348. Résoudre le système d'équations

$$x^2 - yz - zu - uy = a, \qquad y^2 - zu - ux - xz = b,$$
$$z^2 - ux - xy - yu = c, \qquad u^2 - xy - yz - zx = d.$$

(Dawson, M., **588**.)

(*Déprez*, **88**, 78.)

Journal de Mathématiques spéciales, comme nous l'indiquons, sous la signature de M. Walecki, lequel évidemment ignorait l'énoncé de M. Dupain.

349. Discuter le système d'équations

$$\begin{aligned}
&A\cos x\cos y + B\sin x\sin y \\
&\quad + C(\cos x + \cos y) + D(\sin x + \sin y) + E = 0, \\
&A\cos y\cos z + B\sin y\sin z \\
&\quad + C(\cos y + \cos z) + D(\sin y + \sin z) + E = 0, \\
&A\cos z\cos x + B\sin z\sin x \\
&\quad + C(\cos z + \cos x) + D(\sin z + \sin x) + E = 0.
\end{aligned}$$

(M., 594.)

350. Résoudre le système

$$2(x-y)^2[(x+y)^2+z^2] = z^4,$$

$$\frac{3x(x+y)-z^2}{3y(x+y)-z^2} = \frac{4y-7}{7-4x},$$

$$4(x+y)z - z^2 - 16xy = 0,$$

sachant que z est un nombre entier et que x et y sont rationnels.

(M., 656.)

(*Brocard*, **89**, 279.)

351. On donne le système

$$\begin{aligned}
&a\sin(x-\alpha)\sin(y-z) \\
&\quad + b\sin(y-\beta)\sin(z-x) + c\sin(z-\gamma)\sin(x-y) = 0, \\
&a\cos(x-\alpha)\sin(y-z) \\
&\quad + b\cos(y-\beta)\sin(z-x) + c\cos(z-\gamma)\sin(x-y) = 0.
\end{aligned}$$

En déduire les valeurs de $y-z$, $z-x$, $x-y$.

(Neuberg, M., 688.)

(*Joachimescu*, **91**, 25.)

352. Trouver les racines communes aux équations du système

$$(\beta-\gamma)^3(x-\alpha)^3 = (\gamma-\alpha)^3(x-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^3(x-\gamma)^3.$$

(J. M., 227.)

353. Résoudre et discuter, dans les diverses hypothèses que l'on peut faire, le système des trois équations

$$\begin{aligned}
x^n + y^n + z^n &= a^n, \\
x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} &= b^{2n}, \\
x^{3n} + y^{3n} + z^{2n} &= c^{3n}.
\end{aligned}$$

(J. M., 262.)

(*Gilly*, **81**, 381.)

354. Résoudre le système

$$x+y=3\sqrt[3]{x-1}, \qquad x^3+y^3=\frac{x+y}{2y}.$$

(EDMUNDS, J. M., 318.)

355. Résoudre les deux équations

$$xy=(a-b)(x-y),$$
$$ab(x+y)^2=(a^2-b^2)(bx-ay).$$

(BARISIEN, J. E., 542.)

(*Greenstreet*, **94**, 239.)

Systèmes d'équations; éliminations, et propriétés.

356. Étant données deux équations algébriques, chacune à une inconnue, trouver une troisième équation qui ait pour racines les différences que l'on obtient en retranchant successivement chaque racine de la seconde équation de chaque racine de la première. (N. A., 27.)

(*Vachette*, **43**, 508.)

***357.** Démontrer qu'en éliminant f entre les équations

$$4(ae-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2)-(af-3be+2cd)^2=0,$$

$$3[a^2(e^2-df)+3ab(cf-de)+4ac(d^2-ce)$$
$$+2b^2(d^2-bf)+5b^2ce+3c^4-8bc^2d]-(ae-4bd+3c^2)^2=0,$$

on est conduit à l'un ou l'autre des résultats

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)^2=0,$$
$$a^2(ae-4bd+3c^2)-3(b^2-ac)^2=0.$$

(M. ROBERTS, N. A., 731.)

***358.** $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ désignent deux fonctions entières de x et de y; $y_1, y_2, \ldots$ sont les racines de l'équation en y, $f(x, y)=0$, et $x_1, x_2, \ldots$ les racines de la même équation, dans laquelle x est seule traitée comme inconnue; enfin (α_1, β_1),

(α_2, β_2), ... représentent les solutions du système d'équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Démontrer la relation

$$\sum_i \frac{1}{(x-\alpha_i)(y-\beta_i)} = \sum_j \frac{1}{y-y_j} \frac{\dfrac{d\varphi(x, y_j)}{dx}}{\varphi(x, y_j)} + \sum_k \frac{1}{x-x_k} \frac{\dfrac{d\varphi(x_k, y)}{dy}}{\varphi x_k, y}.$$

(Didon, N. A., **1063**.)

359. Éliminer α et β entre les équations

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2,$$

$$c^2\alpha^3 - (c^2 + a^2)a^2\alpha + a^4x = 0,$$
$$c^2\beta^3 - (c^2 - b^2)b^2\beta - b^4y = 0.$$

(Brocard, N. C., **238**.)

360. Si c est plus petit que l'unité, les équations

$$a^2(1 + c^2xy)^2 = x(1 + y)(1 + c^2y),$$
$$b^2(1 + c^2xy)^2 = y(1 - x)(1 - c^2x)$$

sont vérifiées par un système de valeurs réelles de x et de y, où x est inférieur à l'unité. (Richelot, M., **321**.)

(*Mansion*, **86**, 255.)

361. Éliminer x, y, z, u entre les équations

$$x^2 + xy + y^2 = a^2, \qquad z^2 + zu + u^2 = a'^2,$$
$$x^2 + xz + z^2 = b^2, \qquad y^2 + yu + u^2 = b'^2,$$
$$x^2 + xu + u^2 = c^2, \qquad y^2 + yz + z^2 = c'^2,$$

(Neuberg, M., **332**.)

(*Gob*, **85**, 41.)

362. Faire voir que les trois équations

$$a^2(x^2+xy+y^2)-axy(x+y)+x^2y^2=0,$$
$$a^2(y^2+yz+z^2)-ayz(y+z)+y^2z^2=0,$$
$$a^2(z^2+zx+x^2)-azx(z+x)+z^2x^2=0$$

ne sont pas indépendantes. (YOUNG, M., **476**.)

(*Déprez*, **86**, 67.)

363. Éliminer x et y entre les équations

$$a\cos x+b\cos y=1, \qquad a\sin x+b\sin y=1,$$
$$\sin 2x-\sin 2y=c^2(a^2-b^2).$$

(TUCKER, M., **721**.)

(*Delahaye*, **91**, 213.)

364. 1° Éliminer x, y, z entre les équations

$$yz(1-2x)=\alpha^2(1-x)^2,$$
$$zx(1-2y)=\beta^2(1-y)^2,$$
$$xy(1-2z)=\gamma^2(1-z)^2,$$
$$x+y+z=1.$$

2° Éliminer x, y, z entre les équations

$$yz(1-2x)=\alpha^2(1-x),$$
$$zx(1-2y)=\beta^2(1-y),$$
$$xy(1-2z)=\gamma^2(1-z),$$
$$x+y+z=1.$$ (BESSO, M., **816**, **835**.)

365. On donne

$$x-y=a; \qquad xy=b.$$

Exprimer x^n-y^n en fonction de b et de a pour une valeur entière, positive et quelconque de n. (J. M., **287**.)

(*Lapareillé*, **81**, 266.)

366. Montrer que les équations

$$bx^2 + 2x - b = 0,$$

$$ax^4 + 4x^3 - 6ax^2 - 4x + a = 0$$

ne peuvent avoir une racine commune sans en avoir deux. Trouver la relation qui doit exister entre a et b pour qu'elles aient deux racines communes. Expliquer les résultats par la Trigonométrie. (E. Humbert, J. S., 314.)

367. Éliminer le paramètre φ entre les deux égalités

$$2x \sin^3\theta = c \sin^2\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$2y \sin^3\theta = c \sin^2\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right).$$

(De Longchamps, J. E., 486.)

(*Droz-Farny*, **93**, 262.)

Divisibilité algébrique.

368. Soit

$$X = MN^k;$$

M et N sont des fonctions algébriques entières de x n'ayant pas de facteurs communs ni multiples; k est un nombre entier positif. Désignons par P le plus grand commun diviseur de X et de $\frac{dX}{dx}$; faisons

$$Q = \frac{X}{P}, \qquad R = \frac{dX}{P\,dx};$$

alors N est le plus grand commun diviseur de Q et de $R - k\frac{dQ}{dx}$.

(Ostrogradsky, N. A., 332.)

(*Moreau, Rouché, Painvin*, **57**, 26, 66, 241.)

369. Démontrer que le polynome

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

est divisible par $(x-1)^4$. Trouver l'expression générale du quotient. (GENTY, N. A., **1317**.)

(*Pisani*, **79**, 430.)

370. La quantité

$$(x+y)^m - x^m - y^m - 3(x+y)(xy)^{\frac{m-1}{2}}$$

est divisible par

$$x^2 + xy + y^2,$$

si m est un multiple impair de 3. (CAUCHY, M., **19**.)

(*Van Glabbeke*, **81**, 94.)

371. I. Décomposer, en deux facteurs entiers, le polynome

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n.$$

II. Démontrer que p, n étant deux nombres entiers, supérieurs à l'unité, le nombre

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^n)^2 - p^n$$

est composé. (CATALAN, M., **165**.)

(*Polet*, **33**, 46.)

372. L'expression

$$(x+1)^p - x^p - 1$$

est divisible par $(x^2 + x + 1)^2$, lorsque $p = 6m + 1$.

(NEUBERG, M., **520**.)

(*Rochetti*, **86**, 215.)

373. Soit $P_n = x^{2k} - x^k + 1$, k étant égal à 2^{n-1}. 1° Les polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sont premiers entre eux, deux à deux. 2° Dans le produit $P = P_1 P_2 \ldots P_n$, ordonné suivant les puissances de x, les coefficients sont $+1$, -1 ou zéro. 3° La

variable x étant moindre que l'unité, on a, quand n croît indéfiniment

$$(1 + x + x^2) \lim P = 1.$$

(CATALAN, M., 571.)

(*Joachimescu*, **93**, 50.)

374. Si n est impair, le polynome $x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1$ est divisible par $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. (SHARP, M., 715.)

(*Emmerich*, **91**, 208, 245.)

375. Trouver les valeurs de y et de z telles que les polynomes

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y,$$
$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

aient un facteur commun du second degré. (M., 840.)

(*Lippens*, **93**, 149.)

376. a, b, c, d désignant des nombres entiers et positifs, $(1 + x)^{3a+1} + (1 + x)^{6b+2}$ est divisible par $x^2 + x + 1$; $x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1}$ est, de même, divisible par $x^2 + x + 1$; $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ est divisible par $x^3 + x^2 + x^1$.

(LAURENT, J. M., 209.)

(*Papelier*, **80**, 223.)

377. Soit V un polynome entier en x; V_1 sa dérivée. On peut toujours trouver un polynome X tel que $XV_1 - 1$ soit divisible par V; soit V_2 le quotient; on détermine V_3 à l'aide de V_1 et de V_2 comme on a déterminé V_2 à l'aide de V et V_1, etc. La suite $V, V_1, V_2, V_3, \ldots$ peut remplacer la suite de Sturm, si $V = 0$ n'a pas de racines égales. (LAURENT, J. M., 212.)

(*Simon*, **80**, 564.)

378. Si m désigne un nombre entier positif, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $(x + y)^m - (x^m + y^m)$ soit divisible par $x^2 + xy + y^2$? (FABRE, J. M., 273.)

(*Dupuy*, **81**, 282.)

379. Trouver la condition pour que les polynomes

$$ax^7 + bx^3 + c,$$
$$cx^7 + bx^4 + a$$

aient un facteur commun du second degré. (J. M., **359.**)

(*Petit, Hanumenta-Rau*, J. S., **83**, 126; **85**, 256.)

FONCTIONS.

Variations des fonctions; maximums et minimums.

380. Quel est le minimum de matière pour construire un vase cylindrique *droit* dont on donne : 1° l'épaisseur uniforme du fond; 2° l'épaisseur uniforme de la partie latérale; 3° la capacité; 4° l'aire de la paroi intérieure; 5° l'aire de la paroi extérieure; 6° enfin une section faite parallèlement au fond, et semblable à une figure plane donnée? (Bordoni, N. A., **536.**)

(*Brocard*, **94**, 44*.)

***381.** Discuter la fonction

$$y = x \cos e^{\frac{1}{x}}.$$

(Riemann, N. C., **266.**)

***382.** Étant donnée la fonction entière de degré n

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

dans laquelle le coefficient A_0 est positif, soit fait, pour abréger,

$$a_1 = A_1 - A_0,$$
$$a_2 = A_2 - A_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_n = A_n - A_{n-1},$$

et soit m un nombre arbitraire $\geqq n + 2$.

Si la fonction donnée ne change pas de signe lorsque x varie entre les limites o et 1, le nombre

$$\frac{m^{A_0}}{(m-n-1)^{A_n}}(m-1)^{a_1}(m-2)^{a_2}\ldots(m-n)^{a_n}$$

est plus grand ou plus petit que l'unité, selon que le signe de la fonction, entre les limites indiquées, est positif ou négatif.

(REALIS, N. C., **375**.)

383. Étant donnée une feuille de carton ayant la forme d'un polygone régulier quelconque, en faire une boîte dont le volume soit maximum (1). (GELIN, N. C., **417**.)

(*Laisant*, **79**, 25.)

384. Étant donnée une pyramide régulière $SA_1A_2\ldots A_n$, on fait tourner toutes les faces latérales d'un même angle α autour de leurs arêtes à la base. Soient $S_1A_1A_2$, $S_2A_2A_3$, ..., $S_nA_nA_1$ leurs nouvelles positions. Déterminer l'angle α de manière que le volume du corps $A_1A_2\ldots A_nS_1S_2\ldots S_n$ soit maximum.

(M., **24**.)

[*Lambert*, **82**, 34 (2).]

385. Étant donnée une circonférence quelconque O, trouver le maximum de l'aire comprise entre un rayon OA, deux parallèles menées par O et A, et l'arc intercepté par ces parallèles.

(PETIT BOIS, M., **73**.)

[*Pisani*, **82**, 21, 153 (3).]

386. On donne deux circonférences O, O′ dont la seconde a pour diamètre un rayon OA de la première. Mener par O et A, du même côté de OA, deux parallèles telles que l'aire comprise

(1) Généralisation d'un problème résolu, autrefois, par M. J. Bertrand. (*Note de l'Auteur*.)

(2) La solution dont il s'agit n'est peut-être pas absolument complète. La question serait intéressante à revoir.

(3) Généralisation.

entre ces droites et les arcs interceptés sur les deux circonférences soit maximum. (PETIT BOIS, M., **74**.)

(*Pisani*, **82**, 22, 153.)

387. L'expression

$$\sqrt{a^2\cos^2(P+x)+b^2\sin^2(P+x)}$$
$$+\sqrt{a^2\cos^2(P+2\alpha-x)+b^2\sin^2(P+2\alpha-x)}$$

croît lorsque x croît de o à α, si $P+x$ et $P+2\alpha-x$ sont des angles compris entre o et 90°. (M., **251**.)

(**84**, 237.)

388. Discuter la fonction

$$y=\frac{\operatorname{tang}^3 x}{\operatorname{tang} 3x},$$

x variant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. (M., **821**.)

(*Decamps*, **93**, 254.)

389. On donne la longueur d'un arc de cercle, le rayon de ce cercle étant variable. D'un point on mène des droites aux extrémités de l'arc, faisant entre elles un angle donné. Conditions de maximum du triangle curviligne ainsi formé. (J. S., **153**.)

390. Pour tout arc compris entre o et $\frac{\pi}{3}$, la différence $\operatorname{tang} x - x$ est comprise entre $\frac{x^3}{3}$ et x^3. (DELENS, J. S., **364**.)

Fonctions satisfaisant à des conditions données.

391. Trouver une fonction de a, b, c, d telle, qu'en y faisant $b=a$, elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $c=d$, elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$. (LEIBNIZ, N. A., **300**.)

(*Painvin*, **55**, 254, 358.)

392. Trouver la forme générale d'une fonction telle que

$$\varphi(x+y)\times\varphi(x-y)=[\varphi(x)+\varphi(y)][\varphi(x)-\varphi(y)].$$

(On sait que $\sin x$ et Ax sont des solutions particulières.)

(J. Ch. Dupain, N. A., **763**.)

(*Roux*, **67**, 74.)

393. Étant donnée la fonction

$$y=A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots+A_n\cos nx,$$

déterminer les coefficients A_1, A_2, A_3, ..., A_n, de manière que, pour $x=\frac{\pi}{n+1}$, y prenne la valeur de y_1, ..., et que, pour $x=\frac{n\pi}{n+1}$, $y=y_n$; y_1, y_2, y_3, ..., y_n étant des quantités données. (Brocard, N. A., **979**.)

(*Hunyady*, **72**, 39.)

394. 1° Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^m(x^2-b^2)^2(x^2-c^2)^2\ldots(x^2-k^2)^2(x^2-l^2)^2},$$

où l'on a

$$-a<-b<-c<\ldots<-l<l<k\ldots<b<a.$$

2° Démontrer généralement que, dans une fraction rationnelle de la forme précédente, et dans laquelle les mêmes conditions se trouvent réunies, les numérateurs des fractions du premier degré sont nuls, excepté ceux des fractions $\frac{\alpha}{x-a}$ et $\frac{\beta}{x+a}$, lesquels sont toujours égaux et de signes contraires. Donner la signification géométrique de ce fait. (Escary, N. C., **216**.)

395. Étant donnée une fonction entière $f(x)$ de degré n, et

$(n+1)$ quantités arbitraires $a, b, c, \ldots, l$, déterminer la valeur des coefficients A, B, ..., L, dans le développement

$$f(x) = \mathrm{A}f(x-a) + \mathrm{B}f'(x-a-b) + \mathrm{C}f''(x-a-b-c) + \ldots + \mathrm{L}f^n(x-a-b-\ldots-l).$$

(GLASHAN, M., **32**.)

(*Pisani*, **89**, 80.)

396. Les constantes A, B, C, a, b, c étant données, déterminer les constantes A_1, B_1, C_1 de façon que l'expression

$$\frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b} + \frac{\mathrm{C}}{x-c} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^2} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^2} + \frac{\mathrm{C}_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en x.

A quelle condition le problème est-il possible?

Les constantes a, b, c sont supposées différentes. (M., **605**.)

(*Lavallée-Poussin*, **91**, 23.)

397. Étant donnée la fonction

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

on demande de calculer la fonction analogue $\varphi(2x)$ en fonction de $\varphi(x)$. (J. M., **334**.)

(*Boulogne*, **81**, 560.)

***398**. Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

jouissant de la propriété que, si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$ ou à -1. (LAGUERRE, J. S., **142**.)

IDENTITÉS ET INÉGALITÉS.

Identités; carrés ou sommes de carrés.

399. On a

$$4a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2;$$
$$24a_1a_2a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_3 - a_1)^3.$$

Trouver la loi de décomposition analogue pour un produit de n facteurs. (N. A., **78**.)

(*Tardy*, **51**, 319.)

400. Vérifier que

$$\Sigma a^2 \Sigma a'^2 \Sigma a''^2 = [a\Sigma a'a'' + a'\Sigma aa'']^2 + [b\Sigma a'a'' + b'\Sigma aa'']^2 + [c\Sigma a'a'' + c'\Sigma aa'']^2 + [\Sigma(bc' - cb')a'']^2,$$

les neuf quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant assujetties à la seule condition

$$aa' + bb' + cc' = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Cette identité donne, par exemple, la décomposition suivante :

$$(2^2 + 3^2 + 4^2)(4^2 + 4^2 + 5^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) = 74^2 + 71^2 + 112^2 + 92^2.$$

(CATALAN, N. A., **1183**.)

(*Moret-Blanc*, **76**, 138.)

401. Vérifier l'identité

$$\Sigma(a-b)(a-c)(a-d)(3a-b-c-d)$$
$$= (a+b-c-d)^2(a-b+c-d)^2 + (a-b+c-d)^2(a-b-c+d)^2 + (a-b-c+d)^2(a+b-c-d)^2.$$

(¹) Pour y satisfaire, il suffit, comme on sait, de prendre

$$a' = a\gamma - c\beta, \qquad b' = c\alpha - a\gamma, \qquad c' = a\beta - b\alpha.$$

(*Note de M. Catalan.*)

Remarque. — Si a, b, c, d sont des nombres entiers, le premier membre est donc décomposable en une somme de trois carrés. Soient, par exemple

$$a = 3, \qquad b = 5, \qquad c = 1, \qquad d = 2;$$

alors

$$-4 + 216 + 56 - 9 = 259 = 15^2 + 3^2 + 5^2.$$

(Le Paige, N. C., **365**.)

402. Démontrer que

$$\frac{\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^{4m\pm1} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)^{4m\pm1} \mp 2}{x \mp 2}$$

est le carré d'un polynome entier, à coefficients entiers.

(Gelin, N. C., **568**.)

(*Jamet, Piuma,* **80**, 421, 469.)

403. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt{q^2+1}+q)^{2n-1} + (\sqrt{q^2+1}-q)^{2n-1}}{2\sqrt{2p}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(\sqrt{q^2+1}+q)^n - (\sqrt{q^2+1}-q)^n}{}\right]^2 \\
&\quad + \left[\frac{(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1} - (\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}}{4p} + \frac{1}{2p}\right]^2 \\
&\quad + \left[\frac{(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1} - (\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}}{4p} - \frac{1}{2p}\right]^2,
\end{aligned}$$

dans laquelle

$$2p^3 = q^2 + 1. \quad \text{(Catalan, M., 202.)}$$

(*Cesàro,* **84**, 67.)

404. Mettre $4(a^2 + b^2)^2$ sous la forme d'une somme de cinq carrés. (De Rocquigny, M., **330**.)

(*Gob,* **84**, 212.)

405. Décomposer l'expression

$$2(a^4 + a^3 b + 4a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$$

1° en trois carrés; 2° en quatre carrés. (De Rocquigny, M., **365**.)

(*Gob*, **85**, 20.)

406. On sait que l'expression $(a^2 + b^2)^6$ est une somme de deux carrés. Démontrer qu'on peut aussi la mettre sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés.

(Fauquembergue, M., **949**.)

***407.** Si l'on a

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

on a les identités suivantes

$$\begin{aligned} 6n^2 = {} & (x+y)^4 + (x+z)^4 + (x+u)^4 + (y+z)^4 + (y+u)^4 \\ & + (z+u)^4 + (x-y)^4 + (x-z)^4 + (x-u)^4 + (y-z)^4 \\ & + (y-u)^4 + (z-u)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10n^3 = {} & (x+y)^6 + (x+z)^6 + (x+u)^6 + (y+z)^6 + (y+u)^6 \\ & + (z+u)^6 + (x-y)^6 + (x-z)^6 + (x-u)^6 + (y-z)^6 \\ & + (y-u)^6 + (z-u)^6 + 4x^6 + 4y^6 + 4z^6 + 4u^6. \end{aligned}$$

(Ed. Lucas, J. M., **38**.)

***408.** Si l'on a

$$n = x^2 + y^2 + z^2,$$

on a aussi

$$\begin{aligned} 24n^2 = {} & 2(x+y+z)^4 + 2(x+y-z)^4 \\ & + 2(y+z-x)^4 + 2(z+x-y)^4 + (2x)^4 + (2y)^4 + (2z)^4. \end{aligned}$$

(Ed. Lucas, J. M., **39**.)

409. La somme des carrés de trois nombres entiers, multipliée par la somme des doubles produits des carrés de ces nombres, est une somme de trois carrés entiers. (Lemoine, J. E., **482**)

(*Catalan*, **93**, 137)

Identités ; expressions déterminées.

410. Étant donnée l'équation

$$(x^3+y^3-z^3-3xyz)(x'^3+y'^3-z'^3-3x'y'z')$$
$$=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ,$$

comment trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'? (M. Roberts, N. A., 405.)

(*Souillart*, **58**, 192; **60**, 320.)

411.

$$x=\sqrt[6]{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt{2},$$
$$x^6=6x^4+28x^3+18x^2-12x+2,$$
$$x=\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4},$$
$$x^4=10x^2+10x+6,$$
$$x=\sqrt[5]{\frac{\beta^2}{\alpha}}+\sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}},$$
$$x^5=5\alpha x^2+5\beta x+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^3}{\beta}.$$

(Euler, N. A., **500**.)

(*De Virieu*, **60**, 389.)

412. Posons

$$K=4(ae-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2)-(af-3be+2cd)^2,$$
$$H=b^2-ac,$$
$$I=ae-4bd+3c^2,$$
$$J=ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3;$$

alors

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2=4HI^2-12aIJ-a^2K.$$

(M. Roberts, N. A., **608**.)

(*Harang*, **63**, 145.)

*413. En posant

$$\begin{aligned}
H &= a_1^2 - a_0 a_2,\\
I &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,\\
J &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,\\
K &= 4(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)(a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2)\\
&\quad - (a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 - 2 a_2 a_3)^2,\\
L &= a_0^2(a_4^2 - a_3 a_5) + 3 a_0 a_1 (a_2 a_5 - a_3 a_4) + 4 a_0 a_2 (a_3^2 - a_2 a_4)\\
&\quad + 2 a_1^2 (a_3^2 - a_1 a_5) + 5 a_1^2 a_2 a_4 + 3 a_2^4 - 8 a_1 a_2^2 a_3,
\end{aligned}$$

démontrer la relation suivante

$$\begin{aligned}
a_0^2 L^2 &= 4 H[H(I^3 - 9 J^2 - 2 IL - HK) + a_0 J(3 L - I^2)]\\
&\quad + a_0^2 K(HI + a_0 J) + a_0^2 I(12 J^2 + 2 IL - I^3).
\end{aligned}$$

(M. Roberts, N. A., **732**.)

414. Démontrer qu'on a identiquement

$$X^2 Y + Y^2 Z + Z^2 U + U^2 X = 0,$$

en prenant

$$\begin{aligned}
X &= x(xy - z^2),\\
Y &= x^3 - zy^2,\\
Z &= -y(xy - z^2),\\
U &= -(y^3 - zx^2).
\end{aligned}$$

(Hermite, N. A., **794**.)

(*Realis*, **67**, 183; **79**, 301.)

*415. Soient α, β, γ, δ, ε cinq quantités quelconques. Posons

$$\begin{aligned}
A &= (\beta - \gamma)^2(\delta - \varepsilon)^2 + (\beta - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2 + (\beta - \varepsilon)^2(\gamma - \delta)^2,\\
B &= (\alpha - \gamma)^2(\delta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2(\gamma - \delta)^2,\\
C &= (\alpha - \beta)^2(\delta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \delta)^2,\\
D &= (\alpha - \beta)^2(\gamma - \varepsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \gamma)^2,\\
E &= (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2;\\
H &= (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\alpha - \varepsilon)^2(\beta - \gamma)^2\\
&\quad \times (\beta - \delta)^2(\beta - \varepsilon)^2(\gamma - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2,\\
P &= \Sigma(\alpha - \beta)^4(\gamma - \delta)^2(\gamma - \varepsilon)^2(\delta - \varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

Démontrer la relation suivante

$$ABCDE - 2P^2 = 24\Pi.$$

(M. Roberts, N. A., 831.)

*416. Étant donné un produit de n facteurs linéaires, à deux variables, de la forme

$$(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1),$$

on propose de le décomposer en une somme de produits où les variables soient séparées. (Brocard, N. C., 172.)

417. Démontrer que l'expression

$$(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)[a(1-x)-nx]$$

s'évanouit identiquement, si l'on y remplace chaque puissance a^p par le coefficient de a^p, dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$.

(N. C., 560.)

418. Vérifier l'égalité

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{4}}}-\sqrt{-1+\sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{5}}{4}}}}=\sqrt[8]{1+2\sqrt{-2+\sqrt{5}}}.$$

(Catalan, N. C., 569; M., 309.)

(*Stuyvaerts*, M., 84, 198.)

419. Soient

$$A=\frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)},\qquad B=\frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)},$$

$$C=\frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)},\qquad D=\frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

on a

$$(A - B + C - D)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right) = 4^2 \text{ (1)}.$$

(P. A. Mac Mahon, M., 497.)

420. Si A et A′ sont deux polynomes de degré n à coefficients réels, et si B et B′ sont deux polynomes de degré moindre que $2n$, on ne peut avoir l'identité

$$A^3 + B = A'^3 + B'$$

sans avoir les deux suivantes

$$A = A',$$
$$B = B'.$$ (Amigues, J. S., 106.)

(*Bourgarel*, **86**, 93.)

Identités; nombres combinatoires.

421.

$$(-p)^n = -\frac{n}{1} C_{p,n} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} C_{2p,n} - \ldots \pm C_{np,n};$$

n est un nombre entier positif, p une quantité quelconque; et

$$C_{p,n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

(Catalan, N. A., 262.)

(*Tardy*, **54**, 26; **58**, 348.)

422. n_p nombre de combinaisons de n éléments pris p à p *sans répétition*, et n'_p *avec répétition*. On a

$$n'_p - n_1(n-1)'_p + n_2(n-2)'_p$$
$$- n_3(n-3)'_p + \ldots + (-1)^n n_{n-1}(1)'_p = (p-1)_{n-1}.$$

(N. A., 507.)

(*De Virieu*, **60**, 397.)

---

(1) Cet énoncé est inexact (*voir* **91**, 258); nous le maintenons quand même, parce que les formes de A, ... sont intéressantes et peuvent provoquer la recherche d'autres identités dignes de remarque.

423. Si l'on désigne par C_m^p le nombre des combinaisons sans répétition de m objets p à p, en regardant C_m^0 comme égal à l'unité, on a l'identité suivante

$$C_k^0 C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^1 C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^2 C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k} C_{n-k}^k.$$

(D. ANDRÉ, N. A., **966**.)

(*Moret-Blanc*, **71**, 145.)

424. Démontrer la formule suivante, où C_m^n est le nombre des combinaisons de m objets n à n

$$k C_a^k + (k-1) C_a^{k-1} C_b^1 + (k-2) C_a^{k-2} C_b^2 + \ldots = \frac{a}{a+b} C_{a+b}^k k.$$

(H. LAURENT, N. A., **1254**.)

(*Moret-Blanc*, **78**, 236.)

425. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}&(2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \ldots \\ &\quad = C_{n,1} a^{n-1} + C_{n,3} a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5} a^{n-5}(a^2-1)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

(CATALAN, N. A., **1490**.)

426. C_m^p désignant le nombre des combinaisons de m lettres p à p, démontrer la formule

$$2^{2n} = C_{2n}^n + 2 C_{2n-1}^{n-1} + \ldots + 2^k C_{2n-k}^{n-k} + \ldots + 2^n.$$

(PELLERIN, N. A., **1571**.)

427. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}&C_{2n,n} + \frac{1}{3} C_{2n-2,n-1} C_{2,1} + \frac{1}{5} C_{2n-4,n-2} . C_{4,2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} C_{2n,n} \\ &\quad = 4^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} \text{ (1)}.\end{aligned}$$

(CATALAN, N., C., **103**.)

(*Catalan*, **77**, 417.)

---

(1) Par exemple, si $n = 5$

$$252 + \frac{1}{3}.70.2 + \frac{1}{5}.20.6 + \frac{1}{7}.6.20 + \frac{1}{9}.2.70 + \frac{1}{11}.252 = 4^5 \frac{2.4.6.8.10}{3.5.7.9.11}.$$

(*Note de Catalan.*)

428. Vérifier l'identité

$$\sum_{0}^{2} \frac{[C_{2p,p}]^2[C_{2s-2ps,-p}]^2}{C_{s,p}} = 2\sum_{0}^{s}(-4)^p[C_{2s-2p,s-p}]^2 C_{s-p,p}\,(^1).$$

(CATALAN, N. C., 473.)

429. Vérifier l'identité

$$C_{p,q+1} - C_{q+1,q}.C_{p,q+2} + C_{q+2,q}.C_{p,q+3} - \ldots \pm C_{p-2,q}.C_{p,q-1} \pm C_{p-1,q} = 1.$$

(DE LONGCHAMPS, N. C., 497.)

430. Démontrer que

$$\frac{1}{1.2.4}C_{2,1} + \frac{1}{3.4.4^2}C_{4,2} + \frac{1}{5.6.4^3}C_{6,3} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots.$$

(CESÀRO, M., 203.)

(*Mantel*, **90**, 200.)

431. Soit $S_{n,p}$ la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. Démontrer la relation

$$\sum_{i=0}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i}S_{\alpha+i-2,i}.S_{n-\alpha-i,p-i} = C_{n-p+1,\alpha}S_{n,p}.$$

(CESÀRO, M., 356.)

(*Baudran*, **92**, 141.)

432. Démontrer l'identité

$$1 - C^2_{2n,1} + C^2_{2n,2} - C^2_{2n,3} + \ldots + 1 = (-1)^n C_{2n,n}.$$

(CESÀRO, M., 386.)

(*Beyens*, **90**, 63.)

---

(1) Il en résulte par exemple

$$252^2 + \frac{140^2}{5} + \frac{120^2}{10} + \frac{120^2}{10} + \frac{140^2}{5} + 252^2 = 2^4[251^2 - 16.70^2 + 48.20^2].$$

(*Note de Catalan.*)

433. Démontrer la relation

$$C_{n,1} - C_{n,2}C_{3,2} + C_{n,3}C_{4,2} - C_{n,4}C_{5,2} + \ldots \pm C_{n,n}C_{n+1,2} = 0.$$

(CATALAN, M., 505.)

(*Durfee*, **89**, 194.)

434. Vérifier l'identité

$$2^n \sum_0^n (-4)^p [C_{2n-2p,n-p}]^2 C_{n-p,p} = \sum_0^n \frac{[C_{2p,p}]^2 [C_{2n-2p,n-p}]}{C_{n,p}},$$

n étant un nombre fixe et p prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., n. (CATALAN, M., 513.)

435. Démontrer les formules

$$n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - \ldots,$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = 1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \ldots.$$

(ED. LUCAS, M., 562.)

(*Stuyvaert*, **88**, 124.)

436. Vérifier l'identité

$$3^n - \left[\frac{n}{1}\right]^2 3^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 3^{n-2} - \ldots \mp 1$$
$$= 4^n - \frac{n}{1} C_{n+1,n} 4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{n+2,n} 4^{n-2} - \ldots \mp C_{2n,n}.$$

(CATALAN, M., 726.)

[*Laisant*, **91**, 259 (1).]

437. Si a, b sont des nombres entiers et si x, y vérifient la condition $x + y = m$, la quantité

$$m^{b-1}\frac{x^a}{a} - C_{b-1,1}m^{b-2}\frac{x^{a+1}}{a+1} + C_{b-1,2}m^{b-3}\frac{x^{a+2}}{a+2} - \ldots$$
$$\pm \frac{x^{a+b-1}}{a+b-1} + m^{a-1}\frac{y^b}{b} - C_{a-1,1}m^{a-2}\frac{y^{b+1}}{b+1} + \ldots \pm \frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}$$

(1) Généralisation.

est indépendante de x et de y. Quand $m = 1$, la proposition est presque évidente. (CATALAN, M., 831.)

(*Cristescu*, **95**, 19.)

438. Établir l'identité suivante, qui a lieu pour toutes les valeurs entières de p et de n

$$\begin{aligned} &n^p - C_{p+1}^1 (n-1) + C_{p+1}^2 (n-2)^p + \ldots \\ &\quad + (-1)^p C_{p+1}^p (n-p)^p + (-1)^{p+1} (n-p-1)^p = 0. \end{aligned}$$

(DE LONCHAMPS, J. M., 320.)

439. Établir, pour les valeurs entières et positives de p et de n, et quel que soit x, l'identité

$$\begin{aligned} &(x-1)^{p+1} [1^p x + 2^p x^2 + \ldots + n^p x^n] \\ &\quad = \beta_1 x^{n+p+1} + \beta_2 x^{n+p} + \ldots + \beta_{p+1} x^{n+1} \\ &\qquad + \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p-1} + \ldots + \alpha_1 x, \end{aligned}$$

les coefficients α, β, étant indépendants de x, et donnés par les égalités

$$\begin{aligned} &\beta_1 = n^p, \\ &\beta_2 = (n-1)^p - C_{p+1}^1 n^p, \\ &\beta_3 = (n-2)^p - C_{p+1}^1 (n-1)^p + C_{p+1}^2 n^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\beta_{p+1} = (n-p)^p - C_{p+1}^1 (n-p-1)^p, \\ &\alpha_1 = (-1)^{p+1} . 1^p + \ldots + (-1)^p C_{p+1}^p n^p, \\ &\alpha_2 = (-1)^{p+1} . 2^p + (-1)^p C_{p+1} . 1_p, \\ &\alpha_3 = (-1)^{p+1} . 3^p + (-1)^p C_{p+1}^1 2^p + (-1)^{p-1} C_{p+1}^2 1^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha_p = (-1^{p+1} p^p + \ldots + (-1)^2 C_{p+1}^{p-1} . 1^p. \end{aligned}$$

(DE LONGCHAMPS, J. M., 321.)

(*Baron*, **81**, 511.)

440. $C_{m,p}$ désignant le nombre des combinaisons de m objets

p à p_1 et P_m le nombre des permutations de m objets, on a

$$m^m - C_{m-1}(m-1)^m + C_{m,2}(m-2)^m - \ldots$$
$$+(-1)^h C_{m,h}(m-h)^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} 1^m = P_m.$$

(PICQUET, J. S., 158.)

(*Picquet*, **88**, 172, 237.)

441. Démontrer que l'on a

$$1 + C_m^1 C_p^1 + C_m^2 C_p^2 + \ldots + C_m^m C_p^m = C_{p+m}^m,$$

m et p désignant deux entiers positifs tels que $p \geqq m$.

(ROUX, J. S., 230.)

(*Balitrand*, **90**, 272.)

442. Soit

$$x = \frac{1}{2^{n-1}}[C_{n,1} - 3C_{n,3} + 3^2 C_{n,5} - \ldots].$$

Si l'on fait $n = 1, 2, 3, \ldots$, les valeurs de x sont $+1$, -1 où zéro. (CATALAN, J. S., 265.)

(*Baudran*, **91**, 211.)

***443.** Si l'on pose $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{n} = t$, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{C_n^1 t - C_n^3 t^3 + C_n^5 t^5 + \ldots}{1 - C_n^2 t^2 + C_n^4 t^4 - \ldots} = \frac{P}{Q}.$$

Montrer que l'on a

$$P^2 + Q^2 = (1 + t^2)^n,$$

et

$$Q^2 - P^2 = C_n^2 t^2 + C_{2n}^4 t^4 - \ldots.$$

Déduire de là, des relations entre C_n^p et C_{2n}^q.

(G. HUMBERT, J. S., 312.)

Identités; suites terminées, sans variable.

444.

$$a^n + b^n = (a+b)^n - \frac{n}{1} ab(a+b)^{n-2} + \frac{n.n-3}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-5)(n-4)}{1.2.3} a^3 b^3 (a+b)^{n-6} + (-1)^p \frac{n}{1} \frac{n-2p+1}{2}$$
$$\times \frac{n-2p+2}{3} \cdots \frac{n-p-1}{p} a^p b^p (a+b^n-2p),$$

n étant un nombre entier positif. (STERN, N. A., **70**, 479.)

(*Mention, Le Besgue, Vachette,* **47**, 399, 427; **61**, 155, 264.)

445. Soit

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}; \; n_q = \frac{n!}{(n-q)!q!};$$

où $n!$ désigne le produit $1.2.3\ldots n$. On a

$$S_n - n_1.S_{n-1} + n_2.S_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} n_1.S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(ARNDT, N. A., **237**.)

(*Loxhay,* **52**, 463.)

446. Démontrer l'identité

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{a_0(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$$
$$= \frac{a_1}{a_0(a_0+a_1)} + \frac{a_2}{(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}$$
$$+ \frac{a_3}{(a_0+a_1+a_2)(a_0+a_1+a_2+a_3)} + \ldots$$
$$+ \frac{a_n}{(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})(a_0+a_1+\ldots+a_n)}.$$

(WERNER, N. A., **440**.)

(*Brault,* **58**, 296, 393.)

447. Faire voir que, p étant un nombre entier positif quelconque, on a

$$0 = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1^p)}{1^p.2^p} - \frac{m^p(m^p - 1^p)(m^p - 2^p)}{1^p.2^p.3^p} + \ldots.$$

(BOURGET, N. A., **468.**)

(*Françoise*, **59**, 219, 233; **61**, 155.)

448. Soit q_0 le quotient par $1.2.3\ldots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p - a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p - 2a$, et ainsi de suite, en s'arrêtant lorsqu'on trouve un premier nombre nul ou négatif; on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} q_3 + \ldots.$$

(J.-J.-A. MATHIEU, N. A., **838.**)

(*D. André*, **70**, 86.)

***449.** a étant un nombre entier positif quelconque, si l'on désigne par S_n la somme des résultats que fournit l'expression

$$[t_1(a-1)][t_2(a-1)-1]t_3(a-1)-2]\ldots[t_n(a-1)-(n-1)]$$

lorsqu'on y remplace $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à p, avec cette restriction que l'on ait toujours

$$t_{k+1} \geqq t_k$$

et

$$t_k(a-1) > k-1,$$

alors on a l'identité suivante

$$\frac{S_1}{p+1} + \frac{S_2}{(p+1)(p+2)} + \frac{S_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$
$$+ \frac{S_{(a-1)p}}{(p+1)(p+2)\ldots(ap)} = \left(\frac{2^a - 1}{a}\right)^p - 1.$$

(D. ANDRÉ, N. A., **967.**)

450. Montrer que, pour toute valeur entière et positive du nombre m, la suite terminée

$$\frac{2}{1}m - \frac{2}{1}\frac{2}{3}m(m-1) + \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}m(m-1)(m-2)$$
$$- \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}m(m-1)(m-2)(m-3) + \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{2m}{2m-1}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1079**.)

(*Moret-Blanc*, **72**, 519; **74**, 88.)

451. Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des deux nombres m et n, la suite terminée

$$\frac{1}{m} - \frac{n}{1}\frac{1}{m+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{m+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1}{m+4} - \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1080**.)

(**72**, 520; **74**, 88.)

452. Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des trois nombres m, n, p (en supposant, bien entendu, $p > m + n$), la suite terminée

$$\begin{aligned}
&m(m+1)(m+2)\ldots(m+n)\\
&\quad+(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)\\
&\quad+(m+2)(m+3)(m+4)\ldots(m+n+2)\\
&\quad+(m+3)(m+4)(m+5)\ldots(m+n+3)+\ldots\\
&\quad+(p-n)(p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-2)(p-1)p
\end{aligned}$$

a pour valeur

$$\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE, N. A., **1082**.)

(*Moret-Blanc*, **72**, 476.)

453. Démontrer l'égalité

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

(C. DE POLIGNAC, N. A., **1102**.)

(*De Virieu*, **73**, 189.)

454. On a, *identiquement*,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\ (^1).$$

(CATALAN, N. A., **1134**.)

[*Laisant*, **74**, 395 (²).]

455. Démontrer que la formule

$$1-\frac{2^2n^2}{2}+\frac{2^4n^2(n^2-1^2)}{2.3.4}-\frac{2^6n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.3.4.5.6}$$
$$+\frac{2^8n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5.6.7.8}+\ldots$$

a pour valeur -1 ou $+1$, selon que n est un nombre impair ou un nombre pair. (REALIS, N. A., **1190**.)

(*Genese*, **76**, 189.)

(¹) *Note sur une formule de M. Botesù* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 1872).

(²) Généralisation.

*456. $a, b, c, \ldots, k$ étant des quantités inégales, on a

$$\text{(A)} \quad \sum\left(\frac{1}{a-b}+\ldots+\frac{1}{a-k}\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2(a-c)^2(a-k)^2}\right]=0;$$

soient par exemple

$$a=2, \qquad b=5, \qquad c=7, \qquad d=11,$$

l'égalité (A) devient

$$\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9.25.81}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{9.4.36}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{25.4.16}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{81.36.16}\right)=0.$$

(CATALAN, N. A., 1246.)

457. Le nombre entier k étant pair et supérieur à 2, on a

$$k=1+\frac{k-1}{k-2}+\frac{(k-1)(k-3)}{(k-2)(k-4)}+\ldots+\frac{(k-1)(k-3)\ldots 9.7.5}{(k-2)(k-4)\ldots 8.6.4}$$
$$+2\,\frac{(k-1)(k-3)\ldots 7.5.3}{(k-2)(k-4)\ldots 6.4.2}. \quad \text{(REALIS, N. C. 217.)}$$

[*Laisant*, **77**, 169 (1).]

458. Le nombre entier h étant impair, on a

$$h=1+\frac{h-1}{h-2}+\frac{(h-1)(h-3)}{(h-2)(h-4)}+\ldots+\frac{(h-1)(h-3)\ldots 6.4.2}{(h-2)(h-4)\ldots 5.3.1}$$

(REALIS, N. C., 218.)

[*Laisant*, **77**, 169 (2).]

---

(1) Généralisation.
(2) Généralisation.

*459. Démontrer les relations suivantes

$$1-\frac{(m+2)(m-2)}{2.3}+\frac{(m+4)(m+2)(m-2)(m-4)}{2.3.4.5}-\ldots$$
$$=(-1)^{\frac{m}{2}+1};\quad (m \text{ pair}).\quad (\text{Lagrange.})$$

$$1-\frac{(m+1)(m-1)}{1.2}+\frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}-\ldots$$
$$=m(-1)^{\frac{m-1}{2}};\quad (m \text{ impair}).\quad (\text{Lagrange.})$$

$$1-\frac{(m+2)m}{2.3}+\frac{(m+4)(m+2)m(m-2)}{2.3.4.5}-\ldots$$
$$=\frac{1}{m+1}(-1)^{\frac{m}{2}};\ (m \text{ pair}).\quad (\text{Catalan.})$$

$$1+\frac{(m+1)m}{1^2}\,\frac{1}{2}+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1^2.2^2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\ldots=0.$$

(Dirichlet.)

$$1+\frac{m(m-1)}{2^2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^2.4^2}+\ldots=\left(\frac{1}{2}\right)^m C_{2m,m}.$$

(Catalan, N. C., 292.)

460. Vérifier l'identité

$$\frac{1}{2n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\right]=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

(Bombled, N. C., 462.)

[*Cesàro*, **79**, 171, 172 (¹).]

461. Vérifier l'identité

$$\frac{1.2\ldots(a+b)}{1.2\ldots(a-1).1.2\ldots b}\left[\frac{1}{a}c^b-\frac{b}{1}\frac{1}{a+1}c^{b-1}+\frac{b(b-1)}{1.2}\frac{1}{a+2}c^{b-2}-\ldots\pm\frac{1}{a+b}\right]$$
$$=1+\frac{a+b}{1}(c-1)+\frac{(a+b)(a+b-1)}{1.2}(c-1)^2+\ldots$$
$$+\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots b}(c-1)b,$$

dans laquelle a et b sont des nombres entiers.

(Catalan, N. C., 489.)

(*Mangon*, **79**, 253.)

(¹) Généralisation.

462. Si

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_k = (k-1)(a_{k-1} + a_{k-2}),$$

démontrer que

$$a_n + \frac{n}{1} a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} a_1 + a_0 = 1.2.3\ldots n$$

et réciproquement. (M., **186**.)

(*Cesàro*, **84**, 173.)

463. Démontrer l'identité

$$(-1)\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots a_n} + \frac{(a_1-b_1)(a_2-b_1)\ldots(a_n-b_1)}{b_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)\ldots(b_1-b_n)}$$
$$+ \frac{(a_1-b_2)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_2)}{b_2(b_2-b_1)(b_2-b_3)\ldots(b_2-b_n)} + \ldots + \frac{(a_1-b_n)(a_2-b_n)\ldots(a_n-b_n)}{b_n(b_n-b_1)(b_n-b_2)\ldots(b_n-b_{n-1})} = 1$$

(Barbarin, M., **323**.)

(*Neuberg*, **88**, 116.)

464. Démontrer l'identité suivante

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)}$$
$$= \mathbf{S}\frac{1}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots\beta)\ldots(1.2.3\ldots\lambda).2^\gamma(2.3)^\delta\ldots(2.3\ldots p)^\lambda},$$

le signe $\mathbf{S}$ portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui vérifient les deux équations simultanées

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m, \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots + p\lambda = p.$$

(Weill, M., **412**.)

(*G. Teixeira*, **91**, 143.)

465. Si m est un nombre entier, on a

$$\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)} = \frac{1}{2} - m.\frac{1}{2.4} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1.3}{2.4.6} - \ldots$$
$$\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} = 1 - m.\frac{1}{3} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{5} - \ldots.$$

(Servais, M., **634**.)

(*Cristesco, Decamps*, **94**, 71.)

466. Si l'on pose

$$S_{2p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2p},$$

on a l'identité

$$S_{2p} = (2p+1)\left(\frac{1}{1.2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

(De Longchamps, J. M., 45.)

(*Cordeau*, **78**, 111.)

467. Si l'on pose

$$e_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n},$$

on a

$$ne_n = (n+1)e_{(n-1)} - e_{n-2}.$$

(De Longchamps, J. M., 46.)

(*Vautré*, **78**, 112.)

468. Si l'on désigne par S_n la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n},$$

démontrer les identités suivantes

1°

$$nS_n = n + \left[\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right],$$

2°

$$S_{2p} = \frac{3}{2p} + 2p\left[\frac{1}{1(2p-1)} + \frac{1}{2(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)}\right],$$

3°

$$S_{2p} = (2p+1)\left[\frac{1}{1.2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right],$$

4°

$$S_{2p} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2p - C_2^2} + \frac{1}{3p - C_3^2} + \ldots + \frac{1}{p^2 - C_p^2}\right],$$

5°

$$S_n = \frac{n+1}{2} + \left[\frac{2}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{n-2}{2.3}\right],$$

6°

$$(n-1)S_n = (n+1)\left[\frac{n-1}{1.n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-3}{3(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)2}\right],$$

7°

$$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right],$$

8°

$$S_n = 1 + \frac{n+2}{n-2}\left[\frac{1}{2.n} + \frac{1}{3(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1).3}\right],$$

9°

$$2S_n = n + 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-2}{n}\right],$$

10°

$$S_n - S_p = \frac{n+p+1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{n(p+1)} + \frac{n-p-1}{(p+2)(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n(p+1)}\right].$$

(De Longchamps, J M., 254.)

(J. S., **82**, 34, 53.)

469. $a, b, c, \ldots, h$ étant des quantités quelconques, inégales, l'équation

$$y = \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \ldots + \frac{1}{a-h} + \frac{1}{a-x}}{[(a-b)(a-c)\ldots(a-x)]^2} + \frac{\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} + \ldots + \frac{1}{b-h} + \frac{1}{b-x}}{[(b-a)(b-c)\ldots(b-x)]^2} + \ldots + \frac{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-h}}{[(x-a)(x-b)\ldots(x-h)]^2}$$

représente l'axe des abscisses [1]. (Catalan, J. S., 302.)

(**91**, 189.)

---

[1] Voir *Académie de Belgique,* Bulletins, juin 1890.

Identités; suites terminées, contenant une variable.

470. k est un nombre entier positif;

$\sum_0^n f(k)$ est la somme d'une fonction de k, où k prend successivement les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n$;

n_k coefficient de x^k dans le binome $(1+x)^n$;

$n!$ produit continuel $1.2.3\ldots n$.

Si $f(k) = (-1)^k n_k k^{n+1}$, on a

$$\sum_0^n f(k) = n!\,\frac{n.n+1}{2}.$$

(DURÈGE, N. A., **508.**)

(*De Virieu*, **60**,

471. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} = (1+x)^{n-1} &+ \frac{n+1}{1}(1+x)^{n-2}x \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(1+x)^{n-3}x^2 \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n=1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots \\ &+ \frac{(n+1)(n+1)}{1.2}(1+x)^{n-3}x^{n+1} + \frac{n+1}{1}(1+x)^{n-2}x^{n+1} \\ &+ (1+x)^{n-1}x^{n+1}\ (^1).\end{aligned}$$

(CATALAN, N. C., **105.**)

(*Freson*, **77**, 220.)

---

(1) Application

$$\begin{aligned}(1+x)^6 = (1+x)^2(1+x)^4 &+ 5(1+x)^2(x+x^3) \\ &+ 15(1+x)(x^2+x^4) + 35(x^3+x^5) + 70x^6.\end{aligned}$$

Cette formule du binome a de nombreuses conséquences.

(*Note de Catalan.*)

*472. Posant pour abréger

$$\frac{x(x+2)(x+4)\ldots(x+2m-2)}{(x+1)(x+3)(x+5)\ldots(x+2m-1)} = X_{2m-1},$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{(x+1)(x+3)(x+5)\ldots(x+2m-1)} = Y_{2m-1},$$

on a, par identité,

$$X_{2m-1} = 1 - mY_1 + \frac{m(m-1)}{2} Y_3 - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} Y_3 + \ldots,$$

$$Y_{2m-1} = 1 - mX_1 + \frac{m(m-1)}{2} X_3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} X_5 + \ldots,$$

où les suites, dans les seconds membres, sont nécessairement terminées. (Realis, N. C., 226.)

473. Si

$$A_n = \frac{x^2(x^2+2^2)\ldots\left(x^2+\overline{2n-2}^2\right)}{1.2.3\ldots 2n}, \qquad A_0 = 1,$$

$$B_n = \frac{x(x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots\left(x^2+\overline{2n-1}^2\right)}{1.2.3\ldots 2n+1}, \qquad B_0 = x;$$

on a

$$A_n + \frac{1}{2} A_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} A_{n-2} + \ldots = (2n+1)\frac{B_n}{x},$$

$$B_n + \frac{1}{2} B_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} B_{n-2} + \ldots = (2n+2)\frac{A_{n+1}}{x}.$$

Par exemple, en faisant $n = 2$, on trouve

$$\frac{x^2(x^2+2^2)}{1.2.3.4} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = 5\,\frac{(x^2+1^2)(x^2+3^2)}{1.2.3.4.5},$$

$$\frac{x(x^2+1^2)(x^2+3^2)}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2}\frac{x(x^2+1^2)}{1.2.3} + \frac{1.3}{2.4}x = 6\,\frac{(x^2+2^2)(x^2+4^2)}{1.2.3.4.5.6}.$$

(J. W. L. Glaisher, N. C., 472.)

(*Radicke*, **79**, 247.)

474. Vérifier l'identité

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^n\right]$$
$$=1+\frac{n}{3}(x-1)+\frac{n_2}{5}(x-1)^2+\ldots+\frac{1}{2n+1}(x-1)^n,$$

dans laquelle

$$n_1=\frac{n}{1},\qquad n_2=\frac{n(n-1)}{1.2},\qquad \ldots.$$

(HERMITE, N. C., 567.)

(*Mangon*, **80**, 420.)

475. 1° Vérifier la double identité

$$\begin{aligned}\frac{s^p-x^n}{s-x^n}&=1+sx(s^{p-2}+s^{p-3}+\ldots+s+1)\\&=s^{p-1}+s^{p-2}x^n+s^{p-3}x^{n2}+\ldots+x^{(p-1)n}\\&\quad+x^n(x-1)[x^{(p-2)n}+x^{(p-3)n}+\ldots+x^n+1],\end{aligned}$$

dans laquelle $s=1+x+x^2+\ldots+x^n$.

2° Réduire autant que possible l'équation

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^6-x^4=0.$$

(CATALAN, M., 181.)

(*Deblon*, **83**, 141.)

476. Soit $p_r=(1-x)(1-x^2(1-x^3)\ldots(1-x^r)$. Démontrer l'identité

$$\frac{1}{p_n}-\frac{x}{p_1p_{n-1}}+\frac{x}{p_2p_{n-2}}-\ldots\pm\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p_n}=1.$$

(CESÀRO, M., 385.)

(*Klompers*, **90**, 86.)

477. Vérifier l'identité

$$\begin{aligned}&1-\frac{n-1}{1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi-\ldots\\&=\sin^{2n}\varphi+\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi+\ldots+\cos^{2n}\varphi.\end{aligned}$$

(CATALAN, M., 509.)

(*Durfee*, **89**, 196.)

478. On a identiquement

$$\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\ldots+\frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}$$
$$=\frac{x}{1-x}(1+x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{4n})+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n^2}).$$

Si l'on suppose x compris entre 0 et 1 et que l'on fasse croître n indéfiniment, cette identité devient celle de Clausen.

(BASCHWITZ, M., **807**.)

(*Sollertinsky*, **93**, 122, 136.)

479. Vérifier l'identité

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2p})=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k$$

et exprimer k en fonction de p. (FABRE, J. M., **272**.)

(*Gino-Loria*, **81**, 426.)

480. On a

$$\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\frac{1+x^3}{1+x^3}x^9+\ldots+\frac{1+x^n}{1-x^n}xn^2$$
$$=\frac{x}{1-x}(1+x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2n})+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}(1+xn^2).$$

(BASCHWITZ, J. E., **479**.)

(*Foucart*, **93**, 238.)

Inégalités.

481. n étant un nombre positif entier, prouver que l'on a $e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n}$. (N. A., **292**.)

(*Devylder*, **55**, 132; **68**, 165.)

482.

$$n\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots<n\left[1-\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right].$$

(SCHLÖMILCH, N. A., **452**.)

(*Schlömilch*, **59**, 172.)

483.

$$l.(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots < 1 + l.(n+1).$$

(SCHLÖMILCH, N. A., **453**.)

(*Michaux, Schlömilch,* **59**, 68, 71, 150, 172.)

484. La lettre l désignant un logarithme népérien, démontrer les inégalités

$$\frac{ln.l(n+1)}{2} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{3} + \ldots + \frac{ln}{n} > \frac{ln.l(n+1)}{2} - \frac{1}{12};$$

$$\frac{39}{31} - \frac{l(n+1)}{n} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{2.3} + \ldots + \frac{ln}{(n-1)n} > \frac{5}{4} - \frac{l(n+1)+1}{n}.$$

(C. MOREAU, N. A., **1256**.)

485. Démontrer que la somme des inverses de n nombres positifs en progression arithmétique excède le quotient de n^2 par la somme des termes de la progression.

Déduire de cette proposition la divergence de la série

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{8}\right) + \ldots.$$

(LIONNET, N. A., **1294**.)

[*Laisant,* **79**, 330 (¹).]

486. Démontrer les inégalités

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+1}\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n},$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+1}\right).$$

(CESÀRO M., **286**.)

(*Minoliti,* **85**, 35.)

(¹) Généralisation.

487. Démontrer que, lorsque n est un entier supérieur à 5, on a la double inégalité

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(J. M., **264**.)

(*Dupuy*, J. S., **82**, 44.)

488. La somme de n nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, multipliée par la somme de leurs inverses, ne peut jamais être égale à n^2; en d'autres termes, l'équation

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n^2$$

est toujours impossible, sauf pour $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$.

(De Longchamps, J. M., **275**.)

(*Gilly*, **81**, 472.)

489. Démontrer que, pour $x > 1$, on a la relation

$$\log x > \frac{2(x-1)}{x+1},$$

le logarithme étant pris dans le système népérien.

(Ch. Hermite, J. S., **259**.)

(*Mayoux*, **91**, 47.)

PROBLÈMES DIVERS.

Quantités irrationnelles et approximations.

***490.** Est-il possible de démontrer que $2^{\sqrt{2}}$ est une quantité irrationnelle? (N. A., **126**.)

491. Soit

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = \mathrm{P}.$$

Changeant dans ce polynome n signes et désignant le nouveau polynome par Q, combien PQ renferme-t-il de quantités irrationnelles? (N. A., **544**.)

(*Kessler*, **60**, 436.)

492. Le nombre d'années nécessaires pour qu'une somme d'argent, placée à intérêt composé, à t pour 100 par an, soit doublée, est égal, à trois jours près, au quotient de 69,315 par t augmenté de 0,346, t n'étant pas supérieur à 12.

(F. Thoman, N. C., **37**.)

(**75**, 230.)

493. On a

$$\sqrt{4n^2-3}+n=\sqrt{4n^2-1}+\sqrt{n^2-1}\pm\varepsilon,$$

ε désignant un nombre inférieur à 0,001, pour des valeurs entières de n comprises entre des limites assez étendues.

(Brocard, N. C., **124**.)

(*Brocard*, N. A., **94**, 45*

494. Soient ABCDE...L une courbe dont la concavité est tournée vers une droite al sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir

$$aA=y_1,\qquad bB=y_2,\qquad cC=y_3,\qquad \ldots,\qquad lL=y_n.$$

I. L'aire $S=a\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L}l$ est donnée approximativement, par la formule de M. Catalan [1]

$$S=C\ (\text{approximativement}),$$

$$C=h\left(\frac{1}{2}y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}+y_n\right)$$
$$+\frac{1}{4}h\left(\frac{y_2+y_{n-1}}{2}-\frac{y_1+y_n}{2}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{y_3+y_{n-2}}{2}-\frac{y_2+y_{n-1}}{2}\right),$$

---

[1] La formule de M. E. Catalan, comme les deux formules de Simpson, donne exactement l'aire d'une parabole de troisième degré.

(*Note de M. Mansion*.)

avec une erreur moindre que

$$\frac{3}{4}h\left(\frac{y_2+y_{n-1}}{2}-\frac{y_1+y_n}{2}\right).$$

II. Si $n-1$ est divisible par 3, la seconde formule de Simpson

$$S = s' \text{ (approximativement)}$$

$$s' = \frac{3}{8}h[(y_1+3y_2+3y_3+y_4)+(y_4+3y_5+3y_6+y_7)+\ldots$$
$$+(y_{n-3}+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n)],$$

donne S, aussi avec une erreur moindre que

$$\frac{3}{4}h\left(\frac{y_2+y_{n-1}}{2}-\frac{y_1+y_n}{2}\right).$$

III. Si $n=7$, la formule de Weddle

$$S = w \text{ (approximativement)},$$

$$w = \frac{3}{10}h(y_1+5y_2+y_3+6y_4+y_5+5y_6+y_7),$$

comporte une erreur moindre que

$$6h(y_2+y_4+y_6)-3w.$$

(MANSION, M., 59, 60, 61.)

(**81**, 151.)

Autres questions.

495. On convient avec un puisatier de lui payer 100 fr. pour creuser un puits de 60^m; au bout de 30^m, il tombe malade. Combien lui revient-il pour le travail exécuté?

(P. RAMUS, N. A. 320.)

(*G. Bertrand*, **56**, 297.)

496. Soient, sur le cadran d'une montre, à l'instant θ, OA la direction de la petite aiguille, OB celle de la grande; déter-

miner θ de façon que, lorsque, après un certain temps, la petite aiguille sera venue sur la direction OB, la grande aiguille soit précisément dirigée sur OA. Quelles sont toutes les heures comprises dans un cycle complet, de midi à minuit, qui répondent à la question?

Remarque. — On pourrait appeler ce nouveau problème sur les aiguilles d'une montre le *problème des positions inverses*. Il fait connaître les instants pour lesquels les indications de la montre ne seraient pas précises, si les deux aiguilles étaient absolument identiques. (D'Ocagne, N. A., **1468**.)

[*Moret-Blanc, Laisant,* **83**, 523; **84**, 383 (1)].

497. On partage une demi-circonférence en sept parties égales et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits trois à trois des carrés des cordes ainsi obtenues est égale à cent vingt fois la sixième puissance du rayon. (M., **262**.)

(*Fauchamps,* **84**, 41.)

***498.** On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{\text{ième}}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n-p-1$ objets, p à p (2). (Cesàro, M., **383**.)

499. Si

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},\qquad b=\frac{\sin\beta}{\sin\theta},\qquad a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta},\qquad b'=\frac{\sin\beta'}{\sin\theta},$$

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'=\theta,$$

(1) *Voir* aussi **83**, 566, et J. E., **82**, 168.
(2) *Voir* question précédente.

on a

$$(a+b)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}=1,$$

$$(aa'-bb')(ab'-ba')=a'b'=ab,$$

$$(a-a')^2+(b-b')^2+2(a-a')(b-b')\cos\theta$$
$$=\frac{(ab'-ba')^2-(a-a')^2}{aa'}.$$

Si, de plus, $(a-a')^2-(ab'-ba')^2=0$, il faut que $\alpha=\alpha'$; si $(a^2+a'^2)-(ab'-ba')^2=0$, il faut que $\alpha=\alpha'+\frac{1}{2}\pi$.

(BERGMANS, M., 395.)

(*Pisani*, 87, 22.)

*500. Ayant posé

$$\alpha_1=A\alpha+B\beta+C\gamma,\qquad \beta_1=A'\alpha+B'\beta+C'\gamma,$$
$$\gamma_1=A''\alpha+B''\beta+C''\gamma;$$
$$\alpha_2=A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1,\qquad \beta_2=A'\alpha_1+B'\beta_1+C'\gamma_1,$$
$$\gamma_2=A''\alpha_1+B''\beta_1+C''\gamma_1;$$
$$\alpha_3=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2,\qquad \ldots;\qquad \alpha_4=A\alpha_3+B\beta_3+C\gamma^3,\qquad \ldots,$$

on demande comment doivent être les coefficients A, B, C, A', ..., pour que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha}=\frac{\beta_n}{\beta}=\frac{\gamma_n}{\gamma}\ (^1).$$

(E. LEMOINE, M., 598.)

501. Si l'on donne les équations

$$\frac{ax'+by'}{x-x'}=\frac{bx'+cy'}{y-y'}=z',$$
$$X=b(x-x')^2-(a-c)(x-x')(y-y')-b(y-y')^2,$$
$$Z=(a+z')(c+z')-b^2,$$

(1) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle se rattache à la *projectivité cyclique*. Les conditions de la question sont réalisées lorsqu'on fait tourner une figure n fois autour d'un point fixe, chaque fois de l'angle $(2\pi : n)$. (*Note de M. Neuberg.*)

dans lesquelles les inconnues sont x', y', z', X, Z; le produit XZ est indépendant de x', y', z'. (CATALAN, M., 602.)

(*Mosnat*, **88**, 147.)

502. Trouver la somme des produits trois à trois des termes de la progression arithmétique

$$\vdots\, a. \quad a+r. \quad a+2r \quad \ldots \quad a+(n-1)r.$$

(J. M., 384.)

***503.** Prouver que, pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x, l'expression

$$\frac{x^a - x^{1-a}}{x-1},$$

dans laquelle a désigne une quantité comprise entre zéro et l'unité, peut être représentée par

$$(2a-1)\theta,$$

en supposant

$$0 < \theta < 1.$$

(CH. HERMITE, J. S., 260.)

504. On prend p nombres, dans la suite $1.2\ldots n$. On fait la somme de ces p nombres. Évaluer la somme de toutes ces sommes partielles. (CATALAN, J. S., 321.)

(Mme *Prime*, **92**, 264.)

THÉORIE DES NOMBRES.

NUMÉRATION DÉCIMALE.

Puissances de nombres entiers.

1. Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux. (BROCARD, N. A., **971**.)

(*Morel*, **71**, 44, 187.)

2. Trouver les nombres dont les carrés s'écrivent toujours de la même façon dans tout système de numération analogue au système décimal, dont la base est plus grande que 4.
(GUÉBHARD, N. A., **1010**.)

(*Moret-Blanc*, **71**, 431.)

3. Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube. (LAISANT, N. A., **1293**.)

(*Moret-Blanc*, **79**, 329.)

*4. Parmi les chiffres de rang $4p+1$ des puissances successives de 5, les chiffres 3 et 8 se trouvent en plus petit nombre que tous les autres. Par exemple, parmi les 640 chiffres de rang 9 (centaines de millions) de 640 puissances successives quelconques de 5, chacun des chiffres 3 et 8 se trouve soixante fois, tandis que chacun des huit autres chiffres s'y trouve soixante-cinq fois.
(CESARO, N. A., **1432**.)

*5. Les chiffres de rang n, dans les puissances successives d'un

nombre quelconque, se reproduisent périodiquement. Pour les puissances de 5, la période se compose de $2^{n-2}(n > 3)$ termes, dont la somme est le double de $9.2^{n-4} - 1$. Dans cette période, un même chiffre est répété $\frac{1}{5}(2^{n-3} + \varphi)$ fois; φ ayant, pour chaque chiffre, des valeurs différentes, suivant la forme de n, comme l'indique le tableau suivant. On a

		$(n=4p)$.	$(n=4p+1)$.	$(n=4p+2)$.	$(n=4p+3)$.
Pour 0 et 5,	φ.....	3	1	2	—1
1 6	φ.....	—2	1	—3	4
2 7	φ.....	—2	1	2	—1
3 8	φ.....	3	—4	2	—1
4 9	φ.....	2	1	—3	—1

(Cesàro, N. A., **1448**, N. C., **508**.)

6. Toutes les puissances d'un nombre terminé par 12890625 se terminent, aussi, par 12890625. (N. C., **475**.)

(*Laisant*, **79**, 217; **80**, 43.)

7. Il n'y a qu'un seul nombre de huit chiffres, autre que 12890625, qui jouisse de la propriété énoncée dans la question précédente. Déterminer ce nombre.

(Lloyd Tanner, N. C., **476**.)

(*Laisant*, **79**, 217; **80**, 43.)

8. Démontrer que le chiffre des dizaines de mille d'une puissance quelconque de 5 ne peut être ni un 3, ni un 8.

(Laisant, N. C., **492**.)

(*Cesàro*, **79**, 379.)

9. Le nombre qui exprime la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ de dix nombres entiers consécutifs se termine par un 5, excepté si p est un multiple de 4 : dans ce cas, il se termine par 3.

(Cesàro, N. C., **580**; M., **600**.)

(*Jamet*, N. C., **80**, 519; *Brocard*, M., **88**, 103.)

Autres questions.

10. A et B sont deux nombres entiers positifs, ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun; et $A > B$; on a toujours $A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}$; p est un nombre entier positif.

(N. A. **72.**)

(*Colombier*, **43**, 468.)

***11.** Soient A, B, C, ... des nombres dont le premier chiffre à gauche n'est jamais zéro; a, b, c, ... ces nombres lus de droite à gauche.

J'appelle *nombre symétrique* un nombre tel que deux chiffres à égale distance des extrêmes soient égaux.

Exemples : 1221, 12421.

J'appelle *pseudo-symétrique d'échelle p* un nombre tel que la somme de deux chiffres, à égale distance des extrêmes, soit p ou zéro; s'il y a un nombre impair de chiffres dans ce nombre et que p soit impair, le chiffre du milieu doit toujours être zéro; si p est pair, le chiffre du milieu peut être soit zéro, soit $\frac{p}{2}$.

Exemples : 603502, 6030502, 6034502 sont pseudo-symétriques d'échelle 8.

Cela posé :

1° Si A a n chiffres, trouver combien de valeurs différentes peut prendre la somme $A + a$ quand A varie de x^{n-1} à x^n, x étant la base du système de numération;

2° Si l'on a $A + a = B + b$, A ayant n chiffres, B en ayant $n + 1$ et étant tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que x, le nombre $A + a = B + b$ sera symétrique, et A sera pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$.

Exemple : on a ($x = 10$)

$$\overset{\text{N.}}{12111011121} = \overset{\text{A}+a.}{8607004053} + 3504007068$$
$$= \overset{\text{B}+b.}{10011000120} + 02100011001$$

(E. Lemoine, N. A., **1527.**)

12. Trouver des couples de nombres dont le produit ait tous ses chiffres égaux. (J. PLATEAU, N. C., **307**.)

(*Angenot*, **78**, 61.)

13. Un nombre est divisible par 7 lorsque la différence entre le nombre de ses dizaines et le double du chiffre des unités est un multiple de 7. (MENNESSON, N. C., **347**.)

[*Mennesson, Cesàro*, **78**, 151, 156 (¹).]

14. Aucun nombre terminé par 3 ou par 7 ne peut diviser exactement : 1° le produit de deux nombres consécutifs diminué de l'unité ; 2° le produit de quatre nombres consécutifs augmenté de l'unité ; 3° le produit de quatre nombres consécutifs diminué de quatre unités. (E. LUCAS, M., **219**.)

(*Fauquembergue*, **86**, 59.)

15. Un nombre triangulaire n'est terminé par aucun des chiffres 2, 4, 7, 9. (CESÀRO, M., **287**.)

(*Brocard*, **84**, 70.)

16. Trouver deux ou trois nombres premiers dont le produit se compose de sept, onze, treize ou dix-sept fois le chiffre 1 (²).
(M., **528**.)

(*Brocard*, **87**, 73.)

17. Donner le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres de 1 jusqu'à $(10^m - 1)$, inclusivement.
(SOLLERTINSKY, J. E., **492**.)

(Mme *Prime*, **93**, 285.)

(¹) Généralisation.
(²) *Voir* une note rectificative de M. Gelin, **89**, 110.

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN SOMMES.

—

Sommes de deux carrés.

18. Si $x^2 + 2ay^2$ est un carré, $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés. (N. A., **236**.)

(*Thiollier*, **51**, 279.)

19. Le nombre $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme des carrés de deux nombres entiers.

(Catalan, N. A., **1453**; M., **250**; J. S., **75**.)

(*Fauquembergue*, N. A., **83**, 476; *Brocard*, M., **86**, 62, 133; *Cesàro*, J. S., **83**, 224, 248; **84**, 150.)

20. La somme des carrés des nombres impairs de rang pair, diminuée de la somme des carrés des nombres impairs de rang impair, est le double d'un carré. (E. Lucas, N. C., **391**.)

(*Cesàro*, **78**, 364.)

21. Si a, b sont des nombres entiers, tels que $a + b$ égale une somme de deux carrés, et si $n = 2^p$:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$$

est une somme de deux carrés. (Catalan, M., **289**.)

(*De Rocquigny*, **84**, 70.)

22. Si $x^2 + y^2 + z^2$ est un carré,

$$N = [(x^2 + z^2)p - (y^2 + z^2)q]^2 + 4x^2y^2pq$$

est la somme de deux carrés. (Catalan, M., **371**.)

(*Fauquembergue*, **87**, 120.)

23. Mettre

$$24(1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5) + 1$$

sous la forme d'une somme de deux carrés.

(De Rocquigny, M., **530**.)

(*Jamet*, **86**, 262; **90**, 253.)

24. Si A, B, C, a, b, c sont des nombres entiers tels que

$$B^2 - AC = -m^2,$$

la quantité

$$(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)$$

est une somme de deux carrés. (Catalan, M., **538**.)

(*Déprez*, **87**, 144.)

Sommes de trois carrés.

25. Aucun nombre de la forme $m^2(8x + 7)$ ne peut être la somme de trois carrés. (N. A., **275**.)

(*Faure*, **53**, 336.)

26. Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme

$$(6\mu \mp 1)^2,$$

et le troisième la forme

$$4(6\mu \mp 1)^2.$$

(Catalan, N. A., **1144**.)

(*Moret-Blanc*, **75**, 428.)

27. Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs. (Lionnet, N. A., **1318**.)

(*Pisani*, **80**, 524.)

28. Les nombres x, y, z étant exprimés par les formules

$$\begin{aligned} x &= 2(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\alpha(2\beta + 3\gamma + 4\delta), \\ y &= 2(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\beta(2\alpha + 3\gamma + 4\delta), \\ z &= 3(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 4\gamma(\alpha + \beta + 2\delta), \end{aligned}$$

où α, β, γ, δ sont des entiers de signes quelconques, l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ se réduit toujours à une somme de deux carrés.

(S. Realis, N. A., **1330.**)

(*S. Realis,* **81**, 335.)

29. Les données étant les mêmes que dans la question précédente, pour des valeurs entières convenables de α, β, γ, δ, tout nombre N, qui est égal à la somme de deux carrés entiers et à la somme de trois carrés entiers, peut être représenté par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement débarrassés des facteurs communs inutiles.

(S. Realis, N. A., **1330.**)

(*S. Realis,* **81**, 335.)

30. Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs.

Exemples :

$$169^2 = 119^2 + 120^2, \quad \text{et} \quad 169 = 3^2 + 4^2 + 12^2,$$
$$29^2 = 20^2 + 21^2, \quad \text{et} \quad 29 = 2^2 + 3^2 + 4^2.$$

(Gerono, N. A., **1422.**)

(*Romero,* **83**, 329.)

31. a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^{2n-1} + (-a + \sqrt{a^2 + b^2})^{2n-1}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

est la somme de deux carrés et aussi la somme de trois carrés ($n \geqq 2$). (Catalan, N. A., **1469.**)

(*Catalan,* **84**, 342.)

32. a, b étant deux nombres entiers, décomposer, en trois carrés entiers,

$$(1 + a + b + a^2 + ab + b^2)^2.$$

(CATALAN, N. C., **24**.)

(*Catalan*, **75**, 153; **76**, 117.)

33. *Théorème empirique.* — Le triple de tout carré impair, non divisible par 5, est égal à la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que 2 et 3.

Remarque. — Le calcul direct donne

$$\begin{array}{ll}
3.\,1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2, & 3.\,3^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2, \\
3.\,7^2 = 11^2 + 5^2 + 1^2, & 3.\,9^2 = 11^2 + 11^2 + 1^2, \\
3.17^2 = 29^2 + 5^2 + 1^2, & 3.19^2 = 31^2 + 11^2 + 1^2, \\
3.21^2 = 31^2 + 19^2 + 1^2, & 3.23^2 = 37^2 + 13^2 + 7^2, \\
3.27^2 = 43^2 + 17^2 + 7^2, & 3.29^2 = 47^2 + 17^2 + 5^2, \\
3.31^2 = 53^2 + 7^2 + 5^2, & 3.33^2 = 53^2 + 17^2 + 13^2, \\
3.37^2 = 61^2 + 19^2 + 5^2, & 3.39^2 = 67^2 + 7^2 + 5^2, \\
3.41^2 = 71^2 + 1^2 + 1^2, & 3.43^2 = 73^2 + 13^2 + 7^2, \\
3.47^2 = 79^2 + 19^2 + 5^2, & 3.49^2 = 83^2 + 17^2 + 5^2, \\
3.51^2 = 61^2 + 61^2 + 19^2, & 3.53^2 = 89^2 + 41^2 + 5^2, \\
3.57^2 = 97^2 + 13^2 + 13^2, & 3.59^2 = 101^2 + 11^2 + 11^2, \\
3.61^2 = 103^2 + 29^2 + 5^2, & 3.63^2 = 109^2 + 5^2 + 1^2, \\
3.67^2 = 113^2 + 23^2 + 13^2, & 3.69^2 = 101^2 + 61^2 + 19^2, \\
3.71^2 = 103^2 + 67^2 + 5^2, & 3.81^2 = 139^2 + 19^2 + 1^2, \\
3.83^2 = 137^2 + 43^2 + 7^2, & 3.87^2 = 107^2 + 97^2 + 43^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ (1)}.
\end{array}$$

Ainsi, jusqu'à une certaine limite, la proposition énoncée se vérifie. Mais, *très probablement*, cette proposition est inexacte.

---

(1) On trouve encore

$$3.157^2 = 263^2 + 67^2 + 17^2, \qquad 3.159^2 = 269^2 + 59^2 + 1^2,$$

$$3.1841^2 = 3169^2 + 349^2 + 59^2.$$

(*Note de Catalan.*)

Nous prions donc nos jeunes lecteurs de vouloir bien nous indiquer un cas dans lequel la décomposition indiquée soit impossible. (CATALAN, N. C., **214**.)

34. Toute puissance entière de 3 est la somme de trois carrés premiers avec 3. (CATALAN, M., **25**.)

(*Realis*, **81**, 73, 87.)

35. a, b étant des nombres entiers, soient

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \beta = a + \sqrt{a^2 + b^2};$$

la quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

dans laquelle n est un nombre entier, supérieur à 1, est : 1° la somme de deux carrés; 2° la somme de trois carrés.

(CATALAN, M., **290**.)

(*Gillet*, **86**, 65, 133.)

36. Le carré de tout nombre impair, autre que 1, est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés.

(CATALAN, M., **846**.)

(*Jamet, Catalan*, **94**, 27, 52.)

Sommes de plus de trois carrés.

37. Tout nombre impair est la somme de quatre carrés, dont deux sont consécutifs. (LIONNET, N. A., **1061**.)

(*Le Besgue*, **72**, 516; **73**, 217.)

38. Le nombre entier p étant la somme de quatre carrés entiers, on a

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, positifs ou négatifs, tels que la somme algébrique

$$2p + P + Q + R + S$$

est égale à un carré; et l'on a aussi

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2,$$

P', Q', R', S' étant des entiers dont la somme algébrique est égale à p. (S. Realis, N. A., **1136**.)

(*Moret-Blanc*, **75**, 90.)

39. Pour tout nombre impair p, on peut poser

$$p = P + Q + R + S, \qquad p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, dont trois ont une somme algébrique égale à un carré. (S. Realis, N. A., **1218**.)

(*Moreau*, **78**, 45.)

40. Pour tout nombre entier p, de l'une des formes

$$4n+1, \quad 4n+2, \quad 8n+3,$$

on peut poser

$$p = P + Q + R + S, \qquad p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, tels que la somme algébrique

$$P + Q + R + 3S$$

est égale à un carré. (S. Realis, N. A., **1219**.)

(*Moreau*, **78**, 45.)

41. La somme des puissances $4n$ de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.

Corollaire. — La forme $x^{4n} + y^{4n}$ contient une infinité de nombres premiers. (Catalan, N. A., **1480**.)

(*Catalan*, **84**, 347.)

42. Tout nombre entier, de forme $20x - 1$, ou de forme $20x + 9$, est décomposable en $a^2 + 5b^2$.

(Proth, N. C., **298**.)

(*E. Lucas*, **78**, 122.)

43. Si un nombre impair n est la somme de deux carrés non consécutifs, $n+1$ est la somme de quatre carrés.

(CATALAN, M., **518**.)

(*Rochetti*, **86**, 215.)

44. Le produit de quatre nombres en progression arithmétique, augmenté de la somme des puissances quatrièmes de ces mêmes nombres, est la somme de cinq carrés.

(DE ROCQUIGNY, M., **595**.)

(*Brasseur*, **88**, 145.)

45. Si $N-1$ et $N+1$ sont premiers, le nombre $2N^2+2$, somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés [1].

(CATALAN, M., **838**.)

(*Mandart*, **93**, 235.)

46. Le carré de la somme de n carrés est aussi la somme de n carrés. (CATALAN, M., **924**.)

(*Boutin*, **94**, 277.)

Sommes de cubes.

47. Décomposer le quadruple et le carré de $4p^6+27q^6$ en une somme de deux cubes. (E. LUCAS, N. A., **1297**.)

(*Fauquembergue*, **80**, 430.)

48. Décomposer le nombre $x^{12}-9y^{12}$, et son double, en une somme de deux cubes. (ED. LUCAS, N. A., **1298**.)

49. Transformer le produit

$$3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2[(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3]$$

en une somme de trois cubes. (S. REALIS, N. A., **1312**.)

(*Rochetti*, **80**, 459.)

---

[1] Il y a exception pour $N=2$. (*Note de Catalan.*)

50. Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q, tel que le produit p^2q soit la somme algébrique de n cubes entiers.

(S. Realis, N. A., **1313.**)

(*Rochetti, Realis,* **80**, 431; **81**, 177.)

51. Si a, b, c sont trois nombres entiers dont le triple produit soit un cube $(a+b+c)^3$ est décomposable en une somme (algébrique) de quatre cubes. (E. Rebout, N. C., **286.**)

(*Ed. Lucas,* **77**, 413; **78**, 136.)

52. Si l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a^n = 0$$

n'admet que des racines entières et positives :

1° L'expression

$$\frac{a_n(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n)}{6^n}$$

représente un nombre entier, décomposable en une somme de a_n carrés;

2° L'expression

$$\frac{a_n^2(1 + a_1 + \ldots + a_n)^2}{4^n}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de a_n cubes;

3° Le nombre $a_n^2(1 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n)$ est décomposable en une somme algébrique de $2^n a_n$ carrés. (Laisant, J. S., **86.**)

Autres décompositions.

53. Tout nombre pair est égal à un cube qui n'est pas nul, plus trois carrés. (D. André, N. A., **941.**)

(*D. André,* **71**, 185.)

54. Tout nombre entier est la somme d'un carré et de deux nombres triangulaires. (LIONNET, N. A., **1059.**)

(*Le Besgue,* **72**, 516.)

55. Tout nombre entier est la somme de deux carrés et d'un nombre triangulaire. (LIONNET, N. A., **1060.**)

(*Le Besgue,* **72**, 516; **73**, 217.)

56. Le carré de tout nombre impair divisible par 3 est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec 3.

(S. REALIS, N. C., **1279.**)

[*Marchand,* **78**, 463 (¹).]

57. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres compris dans la formule

$$x = \frac{3z^2 \pm z}{2};$$

c'est-à-dire dans la formule qui représente les nombres pentagones, étendue aux valeurs négatives de la variable.

(S. REALIS, N. C., **271.**)

(*S. Realis,* **78**, 27; N. A., **73**, 212.)

58. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres compris dans la formule

$$x = 2z^2 \pm z,$$

c'est-à-dire, dans la formule qui représente les nombres hexagones, étendue aux valeurs négatives de la variable.

(S. REALIS, N. C., **272.**)

(*S. Realis,* **78**, 29; N. A., **73**, 212.)

59. Tout nombre impair, divisible par h, est la somme de quatre nombres compris dans la formule qui représente les

---

(¹) Généralisation.

nombres polygones de l'ordre $h+2$, étendue aux valeurs négatives de la variable.

Même proposition pour tout nombre double d'un impair, dont h est un diviseur pair. (S. Realis, N. C., **273**.)

(*S. Realis*, **78**, 30.)

60. Le carré de tout nombre impair, divisible par 3, est la différence de deux nombres triangulaires, premiers avec 3.

(S. Realis, N. C., **345**.)

(*Cesàro*, **78**, 156.)

DIVISIBILITÉ ARITHMÉTIQUE.

Divisibilité par des nombres donnés.

61. m et r étant des nombres entiers positifs, sous quelle condition $3^{m+r}+1$ est-il divisible par 10, lorsque 3^m+1 est divisible par 10? (1). (N. A., **291**.)

(*Brocard*, **77**, 190.)

62. m étant un nombre entier positif, la valeur *entière* et inférieure la plus approchée de $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ est divisible par 2^{m+1}. Soit, par exemple, $m=1$:

$$(1+\sqrt{3})^3 = 10+6\sqrt{3} = 20,39\ldots;$$

20 est divisible par $2^{1+1}=4$; soit $m=2$:

$$(1+\sqrt{3})^5 = 76+44\sqrt{3} = 152,20\ldots;$$

152 est divisible par $2^{2+1}=8$. (Sylvester, N. A., **365**.)

[*Prouhet*, **57**, 184 (2); *Le Besgue*, **57**, 262.]

---

(1) Énoncé rectifié; *voir* solution.

(2) Généralisation.

63. n étant un nombre entier positif,

$$3^{2n+3} + 40.n - 27$$

est divisible par 64. (WOLSTENHOLME, N. A., **1533**.)

(*Romero*, **85**, 483.)

64. Si l'on a

$$2^k + 1 = mp,$$

les nombres $m - 1$ et $p - 1$ sont, chacun, divisibles par la même puissance de 2. (F. PROTH, N. C., **452**.)

(*Jamet*, **79**, 107.)

65. Démontrer que

$$2^{4n+2} + 7^{2n+4}$$

est divisible ou non par 13, suivant que n est pair ou impair. (J. NEUBERG, M. **164**.)

(*De Graeve*, **83**, 91.)

66. Démontrer que

$$4^{n+2} + 3^{4n+3} + 5^{3n+5}$$

est toujours divisible par 11 et que

$$2^{3n+2} + 21n - 4$$

est toujours divisible par 49. (J. NEUBERG, M. **166**.)

(*Polet*, **83**, 114.)

67. Si n est premier avec 3, le nombre

$$3^{2n} + 3^n + 1$$

est divisible par 13. (CL. SERVAIS, M., **194**.)

(*Gillet*, **83**, 244.)

68. Trouver le reste de la division par 17 du nombre combinatoire

$$C_{10000}^{4356} = \frac{10000 \times 9999 \times 9998 \times \ldots \times 5645}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 4356}.$$

(E. Lucas, M. **261**.)

(*Van den Broeck*, **86**, 179.)

69. Si n est premier avec 15, on a

$$8(2n^2-1)(3n^2-1)-1 = \mathrm{M}.15.$$

(De Rocquigny, M., **345**.)

(*Van den Broeck*, **84**, 245.)

70. Démontrer que

$$10^{3n}-1 = \mathfrak{M}.3^{n+2}.$$

(Van den Broeck, M., **511**.)

(*Henrard*, **86**, 235.)

71. 1° Si le nombre $N = 100a + 10b + c$ est divisible par 131, il en est de même du nombre

$$N' = (c-a)^2 + (3a-b)(3c-b).$$

2° Si le nombre $N = 100a + 10b + c$ est divisible par 107, il en est de même de

$$N' = (7a-c)^2 + 7b^2 \text{ (1)}.$$

(R. Perrin, M., **703**.)

(*Gelin*, **91**, 124, 138.)

72. Quel que soit l'entier n, $n^{13} - n$ est divisible par 2730.

(Anthony, M., **720**.)

(*E. Lemoine*, **91**, 175.)

---

(1) Énoncé rectifié. *Voir* solution.

Divisibilité par des expressions données.

73. r, p, n étant trois nombres entiers positifs, p et n deux nombres premiers entre eux, $\frac{(r-1)(r^{pn}-1)}{(r^n-1)(r^p-1)}$ sera un nombre entier. (N. A., **309**.)

(*De Virieu*, **65**, 514.)

74. Le produit $(p+2)(p+3)\ldots(p+q)$ est divisible par $2.3\ldots q$ lorsque $p+1$ est premier avec q.

Par exemple

$$\frac{17.18.19.20.21\ 22.23.24}{2.3.4.5.6.7.8.9} = 17.19.11.23\ (^1).$$

(CATALAN, N. A., **601**.)

(*Delorme*, **62**, 118.)

75. a, b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est égale à un nombre entier ([2]). (CATALAN, N. A., **1135**.)

(*Bourguet*, **75**, 89, 179.) ([3]).

76. 1° La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres premiers à N et non supérieurs à ce nombre est divisible par N, si m est impair.

2° La somme des produits m à m des nombres premiers à N

([1]) Énoncé rectifié d'après l'auteur; Voir même *Recueil*, **61**, 464.

([2]) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*, seconde Note (Académie des *Nuovi Lincei*, 1873). J'ai donné plusieurs théorèmes d'Arithmétique dans mes *Recherches sur quelques produits indéfinis* (Gauthier-Villars). (*Note de l'auteur.*)

([3]) Généralisation.

et non supérieurs à ce nombre est divisible par N, si m est impair. (E. Cesàro, N. A., **1450**.)

(*Moret-Blanc*, **84**, 483.)

77. Prouver que

$$\frac{(C_{2n-2p,n-p} \times C_{2p,p})^2}{C_{n,p}} = \text{entier}.$$

(Catalan, N. A., **1548**.)

78. Soient A, B, a, b, c des nombres entiers positifs, et $100a + 10b + c$ divisible par $10A + B$: démontrer que

$$cA^2 - bAB + aB^2$$

est, de même, divisible. (P.-A. Mac-Mahon, N. A., **1553**.)

(*Brocard*, **91**, 18*.)

***79.** Démontrer que la somme des puissances semblables des x premiers nombres, augmentée ou diminuée de l'unité, est divisible par $x + 2$. (E. Lucas, N. C., **316**.)

80. Soit

$$S_n = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \ldots$$
$$\pm \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \quad (n > 3).$$

1° La somme S_n est réductible à

$$\frac{P_n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-3)(x+n-1)},$$

P_n étant un polynome du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, à coefficients entiers.

2° Si x est un nombre entier, $P_n \pm 1$ est divisible par $x + n - 1$ ($+1$ pour n impair) [1]. (E. Lucas, N. C., **521**.)

---

[1] *Exemple* : $x = 2$ donne

$$P_3 = 3, \quad P_4 = 11, \quad P_5 = 53, \quad P_6 = 309, \quad \ldots.$$

Or

$$3 + 1 = \mathfrak{M}.4, \quad 11 - 1 = \mathfrak{M}.5, \quad 53 + 1 = \mathfrak{M}.6, \quad 309 - 1 = \mathfrak{M}.7, \quad \ldots.$$

(*Note de l'Auteur*.)

81. Dans quel cas la fraction

$$\frac{n(n+2)(n+4)\ldots(n+4p-2)}{2.3.4\ldots(2p+1)} \quad (n \text{ pair})$$

est-elle réductible à un nombre entier? (CATALAN, N. C., **541.**)

82. Si n est un nombre non premier, supérieur à 4, on a

$$1.2.3\ldots(n-2) = \mathfrak{M}.n. \text{ (}^1\text{)}$$

(CATALAN, N. C., **572.**)

(*Catalan,* **80**, 555.)

83. Si $n = p.q$, le produit $1.2.3\ldots n$ est divisible par

$$(1.2.3\ldots q)^p(1.2.3\ldots p)$$

et, par suite, aussi par

$$(1.2.3\ldots p)^q(1.2.3\ldots q).$$

(M. WEILL, M., **103.**)

(*Bastin,* **84**, 20.)

84. Si $n = \alpha + \beta + pq + rs$, l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots n}{(1.2.3\ldots\alpha)(1.2.3\ldots q)^p(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots\beta)(1.2.3\ldots s)^r(1.2.3\ldots r)}$$

est un nombre entier (M. WEILL, M., **104.**)

(*Liénard,* **84**, 20.)

85. Démontrer les théorèmes suivants :

1° Si p est premier avec n et $n-1$, et que $p-1$ soit premier avec $n-1$, le nombre combinatoire $C_{n,p}$ est divisible par $n(n-1)$;

---

(1) Cette propriété n'est probablement pas plus nouvelle qu'importante. Si nous la proposons aux jeunes lecteurs de la N. C., c'est parce que nous ne croyons pas l'avoir vu énoncer sous cette forme.

(*Note de l'Auteur.*)

2° Si $p+1$ est premier avec $n+1$, et si $p+2$ est premier avec $n+1$ et $n+2$, $C_{n,p}$ est divisible par $(p+1)(p+2)$.

(E. Cesàro, M., **106**.)

(*Neuberg*, **85**, 84.)

86. Soit a un nombre entier, supérieur à 2. Soit α une racine de l'équation

$$x^2 - ax + 1 = 0.$$

La quantité

$$u^n = \frac{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n-2}}{\alpha^{n+1}} + a\alpha^n$$

se réduit à un nombre entier. (Catalan, M., **197**.)

(*Cesàro*, **83**, 246.)

87. Soient

$$a + b + c + \ldots + t = n, \qquad N = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times \ldots \times 1.2\ldots t}.$$

Le nombre $(n+t)N$ est divisible par

$$a+t, \quad b+t, \quad \ldots, \quad a+b+t, \quad \ldots, \quad a+b+c+t, \quad \ldots.$$

(Catalan, M., **224**.)

(*Cesàro*, **83**, 118.)

88. Lorsque n est impair,

$$C_{2n,n} + 10\,C_{2n-2,n-1} = \mathfrak{M}(n+2).$$

(Catalan, M., **574**.)

(*Emmerich*, **90**, 257.)

89. Si n est premier avec 6, on a

$$C_{2n-4,n-2} = \mathfrak{M}(n^2 - n).$$

(Catalan M., **617**.)

(*Emmerich*, **89**, 170.)

90. Soit $N = aB^n + bB^{n-1} + cB^{n-2} + \ldots$ un nombre écrit

dans le système dont la base est B. Si nous désignons par N_α, N_β, N_γ ce que devient N quand on remplace B respectivement par α, β, γ, l'expression

$$\frac{(\beta-\alpha)N_\alpha+(\gamma-\alpha)N_\beta+(\alpha-\beta)N_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

est un nombre entier, inférieur à B si l'une des quantités α, β, γ est positive. (MANDART, M., 925.)

91. n étant impair, le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, n à n, augmenté de dix fois le nombre des combinaisons de $2n-2$ lettres, $n-1$ à $n-1$, est divisible par $n+2$.

Autrement dit,

$$C_{2n,n}+10\,C_{2n-2,n-1}=\mathfrak{M}(n+2)\quad (n \text{ impair}).$$

(CATALAN, J. S., 215.)

92. La quantité

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

n'est pas égale à un nombre entier. (CATALAN, J. S., 235.)

(*Goulard*, **94**, 78.)

93. Démontrer que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{n!}$$

est un nombre entier, lorsque m est un multiple de n.

(CH. HERMITE, J. S., 257.)

(*Catalan, Beyens*, **89**, 19, 22.)

94. On sait que les coefficients de la puissance $m^{\text{ième}}$ du binome sont divisibles par m, à l'exception du premier et du dernier, lorsque m est un nombre premier.

1° On propose d'étendre cette proposition en montrant que l'expression

$$\text{(A)}\qquad \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$$

est divisible par $\frac{m}{\delta}$, δ désignant le plus grand commun diviseur de m et n.

2° Soit ε le plus grand commun diviseur des nombres $m+1$ et n; on demande d'établir que le nombre entier (A) est divisible par

$$\frac{m-n+1}{\varepsilon}.$$

(CH. HERMITE, J. S., **258**.)

(*Catalan*, **89**, 20; **91**, 70.)

Décomposition des nombres en facteurs.

95. Un nombre pair donné étant décomposé, autant de fois que faire se peut, en deux facteurs, l'un impair (l'unité comprise) et l'autre pair; la somme des facteurs pairs, moins la somme des facteurs impairs correspondants, est égale à la somme de tous les diviseurs de la moitié du nombre donné.

(JACOBI, N. A., **249**.)

(*Dallot*, **52**, 126, 186.)

96. Ayant posé, pour abréger

$$P = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$Q = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$R = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2},$$

$$S = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2},$$

où α, β, γ, δ sont des entiers donnés, on propose de décomposer, au moyen de formules directes, l'expression

$$P^2+Q^2+R^2+S^2$$

en deux facteurs représentés, chacun, par une somme de quatre carrés entiers. (S. Realis, N. A., **1237**.)

(*Cauret, Realis,* **78**, 132, 221.)

97. Quatre nombres entiers α, β, γ, δ, positifs ou négatifs, étant donnés, soit fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta(\alpha + \beta + \gamma), \\ Q &= \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha(\beta + \gamma + \delta), \\ R &= \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 - \beta(\gamma + \delta + \alpha), \\ S &= \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma(\delta + \alpha + \beta), \end{aligned}$$

on peut démontrer par un calcul direct que le nombre

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

est le produit de deux facteurs, dont l'un s'exprime par une somme de quatre carrés, et l'autre par une somme de trois carrés. (S. Realis, N. A., **1311**.)

(*Rochetti,* **79**, 426.)

***98.** Décomposer en facteurs premiers le nombre $30^{30} - 1$. (Ed. Lucas, N. C., **91**.)

99. Décomposer en leurs facteurs premiers les nombres $28^7 + 1$, $28^7 - 1$. (Ed. Lucas, N. C., **198**.)

100. Le nombre $C_{m,p}$ ne contient pas le facteur premier λ si

$$m = a\lambda^k - 1 \qquad (a < \lambda).$$

(Mangon, M., **81**.)

(*Clevers,* **82**, 69.)

101. Montrer que, pour savoir combien de fois le nombre premier p est facteur dans le produit $1.2.3\ldots m$ de tous les nombres jusqu'à m, on peut, après avoir écrit le nombre m dans le système de numération dont la base est p, diviser par

$p-1$ l'excès du nombre m sur la somme de ses chiffres. En conclure que p sera facteur dans le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

autant de fois que, dans la soustraction de m et de n écrits dans le système de base p, il faudra ajouter de fois p aux chiffres du plus grand nombre pour rendre les soustractions possibles dans chaque colonne. (M., **211**.)

(*Cesàro*, **84**, 109.)

102. Ayant décomposé, en ses facteurs premiers, le nombre

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n},$$

démontrer que le nombre premier p y entre autant de fois, comme facteur, qu'il y a de nombres impairs, parmi les plus grands nombres entiers contenus dans

$$\frac{2n}{p},\ \frac{2n}{p^2},\ \frac{2n}{p^3},\ \frac{2n}{p^4},\ \ldots.$$

(Cesàro, M., 295.)

(*Van den Broeck*, **86**, 179.)

103. Mettre le nombre

$$x^{10}-5^5y^{10},$$

où x et y sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels. (Ed. Lucas, M., 775.)

(*Fauquembergue*, **93**, 70.)

104. Le quotient de $(2m-1)!$ par $(m)!(m-1)!$ est toujours un nombre pair, excepté quand m est une puissance de 2; l'exposant de la puissance de 2 qui entre en facteur dans le quotient est $(q-p-1)$, q étant la somme des chiffres de $2m-1$ écrits dans le système binaire et p l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui entre en facteur dans m.

(Wolstenholme, J. M., 360.)

Diviseurs des nombres.

105. On a

$$\log(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$
$$= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad a_n = -\frac{S(n)}{n}.$$

$S(n)$ désigne la somme des diviseurs du nombre n.

(N. A., 213.)

106. Représentons par Σp la somme de tous les diviseurs de p, l'unité et p compris. Soient 1, d_1, d_2, d_3, ..., m *tous* les diviseurs du nombre m. Faisons

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \quad \ldots, \quad \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité

$$\Sigma 1 + d_1 \Sigma d_1 + d_2 \Sigma d_2 + d_3 \Sigma d_3 + \ldots + m \Sigma m$$
$$= \frac{m^2}{1} \Sigma 1 + (\delta_1)^2 \Sigma d_1 + (\delta_2)^2 \Sigma d_2 + (\delta_3)^2 \Sigma d_3 + \ldots + 1 \Sigma m,$$

où $\Sigma 1 = 1$.

Exemple :

$$m = 6, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 3,$$

$$\Sigma d_1 = 3, \quad \Sigma d_2 = 4, \quad \Sigma 6 = 12,$$

$$\delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2,$$

$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 36, \quad 1 + 9.3 + 4.4 + 12 = 91;$$

l'identité peut s'écrire ainsi d'une manière abrégée

$$\Sigma(d \Sigma d) = \Sigma \delta^2 \Sigma d.$$

(J. Liouville, N. A., 381.)

(*Hemming*, **65**, 547.)

107. La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$n^p\left(1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\ldots\right).$$

(Cesàro, N. A., 1402.)

108. a, b, c, ... étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a+p}+\frac{p}{b+p}+\frac{p}{c+p}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}.$$

(Cesàro, N. A., 1403.)

109. La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à $l2$. (Cesàro, N. A., 1438.)

110. Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à ln. (Cesàro, N. A., 1439.)

111. La somme des inverses des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\ldots.$$

(Cesàro, N. A., 1440.)

112. Soient a, b, c, ... les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a}+\frac{b}{p^b}+\frac{c}{p^c}+\ldots$$

est égale, en moyenne, à $\frac{1}{p-1}$. (Cesàro, N. A., 1441.)

113. La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à αn^p. La constante α est comprise entre 1 et $\frac{1}{p}+1$. Déterminer sa valeur. (Cesàro, N. A., 1443.)

114. La somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres entiers qui le précèdent, augmentée de la somme des diviseurs des nombres non supérieurs à n, est égale à n^2 [1]. (CESÀRO, N. A., **1449**.)

(**85**, 473.)

115. La somme des diviseurs des nombres 1, 2, 3, ..., n égale la somme des plus grands multiples de ces nombres, non supérieurs à n. (CATALAN, N. C., **447**.)

(*Cesàro*, **78**, 329; **79**, 22, 296.)

116. Soit $\varphi(an)$ le plus grand multiple de a contenu dans n. Soit $\int n$ la somme des diviseurs de n. On a

$$\int n = \sum_{n-1}^{a=n} [\varphi(a, n) - \varphi(a, n-1)] \text{ [2]}.$$

(CATALAN, N. C., **550**.)

(*Radicke*, **80**, 268, 280.)

117. Si $f(n)$ est le nombre des diviseurs impairs de n, et que $F(n)$ soit la somme des diviseurs pairs de n, on a, en supposant $f(0) = 0$, $F(n) = n$:

$$\begin{aligned} &f(n) + f(n-1) + f(n-3) + f(n-6) + f(n-10) + \ldots \\ &\quad = F(n) + F(n-1) + F(n-3) + F(n-6) + F(n-10) + \ldots. \end{aligned}$$

Dans cette formule, 1, 3, 6, 10, ... sont les nombres triangulaires. *Exemples :*

$$n = 14 : 8 + 14 + 12 + 1 + 1 = 16 + . + . + 14 + 6,$$
$$n = 15 : 24 + 8 + 4 + 13 + 6 + 0 = 6 . + 16 + 24 + . + . + 15.$$

(J. W. L. GLAISHER, N. C., **478**.)

---

[1] Ce théorème a été énoncé par M. Catalan, comme suit : « La somme des diviseurs des nombres 1, 2, 3, ..., n, égale la somme des plus grands multiples de ces nombres non supérieurs à n. »

Voir question suivante (115). (*Note de l'auteur.*)

[2] A rapprocher de la question précédente.

118. Soit a_n *le plus grand diviseur impair* de n. Démontrer que

$$\frac{a_1}{1^3}+\frac{a_2}{2^3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{4^3}+\ldots=\frac{\pi^2}{7}.$$

(CESÀRO, M., **531**.)

(*Mantel*, **88**, 208.)

Nombres premiers entre eux. — Codiviseurs. Comultiples.

119. Toute progression arithmétique où la raison et le premier terme sont premiers entre eux renferme un nombre infini de termes premiers à un nombre donné quelconque.

(JACOBI, N. A., **316**.)

(*Durand*, **56**, 296; **58**, 396.)

120. Le plus petit commun multiple m de n nombres entiers a, b, c, ..., k, l est égal au quotient de leur produit P par le plus grand commun diviseur D des produits $n-1$ à $n-1$ de ces n nombres. (LE BESGUE, N. A., **912**.)

(*André*, **69**, 78.)

121. Le plus grand commun diviseur D de n nombres entiers a, b, c, ..., k, l est égal au quotient de leur produit P par le plus petit commun multiple m des produits, $n-1$ à $n-1$, de ces nombres. (LE BESGUE, N. A., **913**.)

(*André*, **69**, 78.)

122. La formule $ax+b$, où a et b sont premiers entre eux, ne renferme que des nombres premiers à m, si tous les diviseurs premiers de m divisent a. Mais, si m a des diviseurs premiers p, q, r, ..., qui ne divisent pas a, sur m nombres consécutifs compris dans $ax+b$, en posant

$$x=\alpha,\qquad \alpha+1,\qquad \ldots,\qquad \alpha+m-1,$$

il y aura

$$m\frac{p-1}{p}\frac{q-1}{q}\frac{r-1}{r}\cdots$$

nombres premiers à m. (GAUSS, N. A., 914.)

(*Morel*, **69**, 238.)

123. Le déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dont l'élément général u_{ij} est égal au nombre des diviseurs communs de $i+1$, $j+1$, représente la totalité des entiers, non supérieurs à n, dépourvus de diviseurs carrés, autres que l'unité.

(CESÀRO, N. A., 1522.)

124. Trouver trois nombres entiers, premiers entre eux deux à deux, tels que la somme des deux quelconques d'entre eux n'admette pas de facteurs premiers autres que ceux qui sont contenus dans le troisième. Exemple 3, 5, 22.

(E. QUÉTELET, N. C., 42.)

125. Le plus grand commun diviseur entre un nombre c et le plus petit multiple de deux nombres a, b est égal au plus petit multiple des plus grands communs diviseurs entre les nombres a, c et entre les nombres b, c

$$\mathrm{D}\left\{m(a, b), c\right\} = m\left\{\mathrm{D}(a, c), \mathrm{D}(b, c)\right\}.$$

(C. MOREAU, N. C., 223.)

(*Freson*, **77**, 222.)

126. Si l'on représente par (i, k) le plus grand commun diviseur entre i et k, et par $\varphi(i)$ le nombre des entiers premiers à i et non supérieurs à i, l'on a

$$\begin{vmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, n) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (n, 1) & (n, 2) & (n, 3) & (n, n) \end{vmatrix} = \varphi(1).\varphi(2).\varphi(3)\ldots\varphi(n).$$

(SMITH, N. C., 324) [1].

(*Catalan*, **78**, 103.)

[1] Nous espérons pouvoir donner, bientôt, une démonstration de ce

127. a et b désignant deux nombres entiers quelconques, trouver la somme des nombres premiers à a et inférieurs au produit ab. (MENNESSON, N. C., **348**.)

128. a et b désignant deux nombres entiers, premiers entre eux, trouver la somme des nombres premiers au produit ab et inférieurs à ab. (MENNESSON, N. C., **349**.)

(*De Marsilly*, **78**, 154.)

129. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(n)}$ les $\varphi(n)$ nombres premiers à n et non supérieurs à n. La somme de leurs produits $\varphi(n)-1$ à $\varphi(n)-1$ est un multiple de n. (MENNESSON, N. C., **366**.)

(*Cesàro*, **79**, 56.)

130. Soit la suite

$$1,\ 2,\ 8,\ 50,\ 418,\ 4348,\ \ldots,$$

dont les termes satisfont à la condition

$$u_n = (2n-1)u_{n-1} - (n-1)u_{n-2}.$$

Le p. g. c. d. à u_n et u_{n+1} est 2^q, q étant le quotient entier de $2n+1$ par 8. (SYLVESTER, N. C., **520**.)

131. On désigne par $\varphi(a)$ le nombre des entiers non supérieurs au nombre a et premiers avec lui, et par $\psi(a)$ le nombre des entiers plus grands que a, premiers avec lui et non supérieurs à un nombre quelconque n, connu.

1° Calculer l'expression de $\psi(a)$;

2° Démontrer que

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots\varphi(n) = \psi(2)+\psi(3)+\ldots\psi(n);$$

---

remarquable théorème, dont M. Mansion a déduit des corollaires encore plus remarquables. (*Note de la Rédaction.*)

3° Démontrer que

$$2\varphi(2)+3\varphi(3)+\ldots+n\varphi(n)=2[2\psi(2)+3\psi(3)+\ldots+n\psi(n)].$$

(Ed. Lucas, N. C., 525.)

(*Radicke*, **80**, 267.)

132. Le plus petit multiple de $1, 2, 3, \ldots, 2n$ est égal à celui de $n+1, n+2, \ldots, 2n$. (Catalan, M., 896.)

(*Hacken*, **94**, 236.)

133. Démontrer les relations combinatoires suivantes :

1°

$$1-\frac{1}{k+1}C_{n,1}+\frac{1}{2k+1}C_{n,2}\ldots\mp\frac{1}{nk+1}$$
$$=\frac{1.2\ldots n}{(k+1)(2k+1)\ldots(nk+1)}k^n\ (^1).$$

2°

$$C_{2n,n}+C_{2n-2,n-1}.C_{2,1}+C_{2n-4,n-2}.C_{4,2}+\ldots+C_{2n,n}=4^n.$$

3°

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}C_{p,1}+\frac{1}{n-1}C_{p,2}-\ldots=(-1)^p\frac{1}{(n+1)C_{n,p}}.$$

4° Si n est premier avec 6, on a

$$C_{2n-1,n-2}=\mathfrak{M}(n^2-n).$$

(Catalan, J. S., 231.)

(*Clapier*, **91**, 230.)

---

(1) On pourra déduire de ce résultat le développement, en fractions simples, de la fraction rationnelle

$$\frac{1.2\ldots n}{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}.$$

(*Note de l'Auteur.*)

NOMBRES PREMIERS.

Propriétés de divisibilité.

134. L'exposant du binome de Newton étant de la forme $a^p - 1$, où a est un nombre premier et p un nombre entier positif quelconque, aucun coefficient du binome n'est divisible par a; si l'exposant est a^p, tous les coefficients (les deux extrêmes exceptés) sont divisibles par a. (N. A., 55.)

(*D. André*, **46**, 121.)

135. p nombre *premier* impair; a, b deux nombres *premiers entre eux*; $a + b$ et $\frac{a^p + b^p}{a + b}$ ne peuvent avoir d'autre facteur commun que p; si $a^p + b^p$ est divisible par p^q, alors $a + b$ est divisible par p^{q-1}; mêmes propriétés lorsqu'un des nombres a, b devient négatif. (KUMMER, N. A., **184**.)

(*Mention, Gilles*, **48**, 307.)

136. Soient p un nombre premier et X un polynome tel que

$$X = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}.$$

En donnant à chaque coefficient a toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., $p - 1$, on aura p^n valeurs de X, dont l'une sera zéro. Si l'on élève toutes les valeurs de X à la puissance m, et qu'on représente la somme des résultats par ΣX^m, on aura

$$\Sigma X^m = \text{un multiple de } p,$$

si $m < p^n - 1$; mais l'égalité précédente n'aura pas lieu si $m = p^n - 1$. (J. A. SERRET, N. A., **293**.)

(*Genocchi*, **55**, 241.)

137. P étant le produit des entiers inférieurs et premiers à

un nombre N, la différence $P - 1$ est divisible par N lorsque N n'est ni premier, ni le double d'un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance. (LIONNET, N. A., **880**.)

138. Le nombre p étant supposé *premier*, et les deux groupes

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_{p-1}, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_{p-1}$$

formant deux systèmes complets de résidus premiers par rapport au module p, il y a nécessairement deux indices différents i et k, tels que les produits $r_i s_i$, et $r_k s_k$ sont *congrus* par rapport au module p [1]. (A. HURWITZ, N. A., **1417**.)

(*Chabanel*, **83**, 427.)

139. 1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels est divisible par tous les nombres premiers compris entre $m + 1$ et $n + 2$, et supérieurs à $n - m$.

2° La même somme diminuée de $1.2.3\ldots m$, est divisible par $n - m$, si ce nombre est premier. (CESÀRO, N. A., **1445**.)

140. Le nombre premier $p = 2n + 1$ étant supérieur à 3, la somme des puissances, d'un même degré pair $2a$ compris entre 0 et $p - 1 = 2n$, des n entiers $1, 2, 3, \ldots, n$, et celle des puissances, du même degré, des n entiers suivants $n + 1, n + 2, \ldots, p - 1 = 2n$, sont divisibles par p. (LIONNET, N. A., **1467**.)

(*Moret-Blanc*, **84**, 395.)

141. Démontrer que la somme des carrés des coefficients binomiels d'un nombre entier positif a,

$$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2$$

n'est *jamais* divisible par un nombre premier $p > 2a$; mais

---

[1] C'est-à-dire que la différence de ces deux produits est divisible par p.

toujours divisible par *tous* les nombres premiers compris entre $\frac{2a}{2n+2}$ et $\frac{2a}{2n+1}$, où n est un nombre entier positif et $< a$; et que la même somme n'est pas divisible par un même nombre premier p compris entre $\frac{2a}{2n+3}$ et $\frac{2a}{2n+2}$, excepté si une puissance de p (supérieure à l'unité) se trouve dans l'intervalle de a jusqu'à $2a$. [Szily, N. A., 1655 (¹).]

142. Si p est un nombre premier, on a

$$C_{np-1,p-1} = 1 + \mathfrak{M}.p.$$

Par exemple,

$$C_{14.4} = \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4} = 1001 = 1 + \mathfrak{M}.5.$$

(Catalan, N. C., 26.)

143. Dans le produit

$$1.2.3.4\ldots 2^k,$$

il y a au moins un nombre premier impair qui y entre comme facteur avec un exposant impair. (Proth, N. C., 387.)

144. α désignant un nombre premier, inférieur à n, et q un nombre impair quelconque :

$$\Sigma \alpha^q \equiv \tfrac{1}{2}\varphi(n^{q+1}) (\operatorname{mod} q),$$

$\varphi(n)$ ayant la signification habituelle. (Mennesson, N. C., 409.)

145. Tout nombre premier p divise :

1° La somme des produits m à m des $p-2$ premiers nombres naturels, diminuée de l'unité;

2° La somme des produits m à m des $p-1$ premiers nombres naturels, excepté quand $m = p-1$;

3° La somme des produits $p-1$ à $p-1$ des p premiers nombres naturels, augmentée de l'unité. (Cesàro, N. C., 442.)

(¹) Dans les N. A., la question a été numérotée par erreur 1647.

146. Tout nombre premier, compris entre $m+1$ et $n+2$ divise :

1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels, s'il est supérieur à $n-m$;

2° Cette même somme, diminuée du produit des m premiers nombres naturels, s'il est égal à $n-m$. (CESÀRO, N. C., **444**.)

147. Tout nombre premier p divise :

1° La somme des produits $p-1$ à $p-1$ des n premiers nombres naturels, augmentée de l'unité, s'il est supérieur à $\frac{n+1}{2}$;

2° Cette même somme, augmentée de deux unités, s'il est égal à $\frac{n+1}{2}$ ou à $\frac{|n}{|2}$. (CESÀRO, N. C., **445**.)

148. Si le nombre 2^k+1 est premier, la division de $3^k-3^{\frac{k}{2}}$ par $2^k-3^{\frac{k}{2}}+1$ donne pour quotient entier un carré, et pour reste encore un carré ($k=2^n$). (PROTH, N. C., **451**.)

149. Si p est premier

$$5^p-2.3^p+1=\mathrm{M}.p.$$

(DE ROCQUIGNY, M., **220**.)

(*Servais*, **84**, 110.)

150. Si p désigne un nombre premier, déterminer le plus petit nombre n pour lequel le produit des n premiers nombres est divisible par p. (ED. LUCAS, M., **288**.)

(*Neuberg*, **87**, 68.)

151. Si p est un nombre premier avec 5, $p^{8n}+3p^{4n}-4$ est divisible par 25. (DE ROCQUIGNY, M., **364**.)

(*Lemoine*, **85**, 67.)

152. Soit a^n la plus faible puissance de a, qui divisée par le

nombre premier absolu p, donne pour reste 1. Démontrer que, si l'on élève tous les termes de la période des restes à la puissance q, la somme de ces puissances est divisible par p, si n n'est pas diviseur de q; elle est égale à un multiple de p augmenté de n, si p est diviseur de n. (SCHWARTZ, M., 547.)

(*Hacken*, **87**, 124.)

153. Le nombre

$$1.2.3\ldots(p-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)$$

n'est divisible par p^2 que si p est un nombre premier supérieur à 3. (G. OSBORN, M., 886.)

154. Si p est un nombre premier autre que 2, et q un entier inférieur à $p-1$, en posant

$$\theta_{p.q}=\frac{2^q-1}{2-1}+\frac{3^q-1}{3-1}+\ldots+\frac{(p-1)^q-1}{p-2},$$

$\theta_{p.q}+q+1$ est un multiple de p. (DE LONGCHAMPS, J. E., 487.)

(*Grolleau*, **93**, 279.)

Autres propriétés.

155. Soient p un nombre premier plus grand que 3, et r un nombre quelconque de la suite $2, 3, 4, \ldots, p-2$.

Écrivons de gauche à droite sur une ligne horizontale la progression $1, 2, 3, 4, \ldots, p$; et au-dessous une deuxième ligne horizontale $1+r, 2+r, 2+r, \ldots, p+r$; puis une troisième ligne $1+2r, 2+2r, 3+2r, \ldots, p+2r$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne $1+(p-1)r, 2+(p-1)r, \ldots, p+(p-1)r$, et toutes les fois qu'on aura un nombre plus grand que p, on n'écrit que le résidu de ce nombre divisé par p.

Démontrer qu'on ne rencontre aucun nombre répété dans

aucune ligne horizontale, dans aucune ligne verticale, dans aucune des deux lignes diagonales. (CRELLE, N. A., 299.)

(*Painvin*, **55**, 257.)

156. Si p et $4p+1$ sont deux nombres premiers absolus, 2 est racine primitive relativement au nombre $4p+1$ [1].

(TCHEBYCHEF, N. A., 343.)

(*Rochette*, **57**, 159.)

157. Si $E(q)$ désigne la partie entière du nombre q; p_1, p_2, p_3, ... la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...; $S_{j,n}$ la somme des produits j à j des n nombres 1, 2, 3, ..., n; $F_\omega(x)$ un polynome du degré ω et à coefficients entiers, on aura

$$S_{j,n} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-j+1)}{p_1^{\varphi_1}p_2^{\varphi_2}p_3^{\varphi_3}\ldots} F_{j-1}(n),$$

l'exposant φ d'un nombre quelconque p étant donné par la formule

$$\varphi = \sum_{\mu=\infty}^{\mu=0} E\frac{j}{(p-1)p^\mu}.$$

(SYLVESTER, N. A., 791.)

158. p et q désignant des nombres premiers respectivement des formes $18n+5$ et $18n+11$, il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants

$$p, \quad 2p, \quad 4p^2,$$
$$q^2, \quad 2q^2, \quad 4q.$$

(SYLVESTER, N. A., 802.)

(*Ed. Lucas*, **78**, 507.)

---

[1] Énoncé par l'éminent arithmologue dans un Ouvrage sur les congruences, publié en langue russe à Saint-Pétersbourg. In-8° de 279 pages; 1848. (*Note de la Rédaction.*)

159. Lorsqu'un nombre premier est de la forme $1 + 2^n$, l'exposant n est nul ou de la forme 2^α. (LIONNET, N. A., **881**.)

[*Toubin*, **71**, 181 (¹).]

160. Tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers impairs? (²) (LIONNET, N. A., **883**.)

161. G étant une racine primitive de p^ν, la fonction

$$x + xg^2 + xg^4 + \ldots + xg^{p^{\nu-1}(p-1)-2},$$

où tous les exposants de g sont des nombres pairs, est divisible par

$$\frac{xp^\nu - 1}{xp^{\nu-1} - 1};$$

p est supposé un nombre premier autre que 2, et ν plus grand que 1. (PELLET, N. A. **1479**.)

162. p étant un nombre premier, et P un polynome entier à coefficients entiers, l'équation

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7 \qquad \text{et} \qquad P = x^2 + xy + y^2.$$

(CATALAN, N. A., **1489**.)

(*Catalan*, **85**, 520.)

163. Si p est un nombre premier, supérieur à 3, $4p^2 + 1$ est la somme de trois carrés. (PROTH, N. C., **294**.)

(*Ed. Lucas*, **78**, 120.)

(¹) Généralisation.

(²) Cette question n'est autre que le célèbre théorème empirique de Goldbach, qui n'a jamais été, ni démontré, ni mis en défaut. Voir à ce sujet un article fort intéressant de Lionnet. (*N. A.*, **79**, 356.)

164. Si p est un nombre premier, de forme $4\mu + 1$, le nombre $2p$ est décomposable en deux parties, dont tout diviseur premier, s'il n'est 3, a la forme $6x + 1$. (PROTH, N. C., 295.)

165. Tout nombre premier, de forme $6x + 1$, est décomposable en $a^2 + b^2 + ab$. (PROTH, N. C., 300.)

(*Ed. Lucas*, **78**, 122.)

166. P étant un nombre premier, la quantité

$$(1.2.3.5.7.11\ldots P) \pm 1$$

ne peut être une puissance exacte. (PROTH, N. C., 301.)

[*Ed. Lucas*, **78**, 123 (1).]

167. Démontrer que, si $8q + 7$ est premier, $2^{4q+3} - 1$ ne l'est pas. (ED. LUCAS, N. C., 312)

168. THÉORÈMES EMPIRIQUES. — I. Tout nombre premier p, de la forme $4m - 1$, est égal à un nombre premier p', de la forme $4m + 1$, augmenté du double d'un nombre premier p'', de cette seconde forme. (LAGRANGE.)

II. Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers (2).

III. Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes. [CATALAN, N. C., 320 (3).]

169. Dans le développement de $(1 \pm z)^{-\frac{q}{p}}$, p étant premier,

---

(1) Généralisation.

(2) N'est-ce point à Golbach qu'est due cette curieuse proposition? (Voir plus haut, question 160). (*Note de Catalan.*)

(3) *Voir* une Note **79**, 304, et plus loin, p. 218, la Note au n° **259**.

tous les coefficients sont réductibles à la forme

$$\frac{N}{p^n}.$$

Par exemple,

$$(1-z)^{-\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}z + \frac{3}{5^2}z^2 + \frac{11}{5^3}z^3 + \frac{44}{5^4}z^4 + \frac{924}{5^6}z^5 + \frac{4004}{5^7}z^6 + \ldots.$$

(CATALAN, N. C., 336) (1).

170. Si un nombre premier P a la forme $4\mu = 1$, P^2 est la somme de trois carrés. (CATALAN, M., 855.)

(*Catalan*, **93**, 256.)

171. p étant un nombre premier, si pN est la somme de $p+1$ carrés dont p soient égaux, N jouit de la même propriété. (CATALAN, M., 883.)

(*Fauquembergue*, **94**, 173.)

Problèmes.

172. Trouver les nombres pairs et positifs ayant chacun cette curieuse propriété d'être d'autant de manières la somme de deux impairs composés. (LIONNET, N. A., 1408.)

(*Lionnet*, **82**, 476.)

173. Trouver, rapidement, si le nombre $2^k \pm 1$ est premier. S'il est composé, dans quel cas peut-on déterminer ses diviseurs? (PROTH, N. C., 327.)

174. Trouver une infinité de nombres premiers, de la forme

$$4x+1,$$

égaux chacun à la somme de trois carrés inégaux (2).

(PROTH, N. C., 331.)

---

(1) *Voir* une Note, **79**, 292.

(2) M. F. Proth annonce qu'il a résolu, complètement, ce difficile problème. A ce propos, nous rappellerons ce théorème empirique : « Le

175. D'après le théorème de Fermat,

$$2^{p-1} - 1 = pN.$$

Comment doit-on prendre le nombre premier p, pour que N soit un carré? (CATALAN, M., 82).

(*Brocard*, **83**, 41, 80.)

176. Sommer

$$2^{n-2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3} 2^{n-6} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4.5} 2^{n-10},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et démontrer que, si n est un nombre premier, les fonctions

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}, \quad \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4.5}, \quad \dots$$

se réduisent à des nombres entiers. (CATALAN, J. S., 81.)

Criteriums, formes et répartition des nombres premiers.

177. La suite des nombres premiers 2, 3, 5, 17, 257, ... de la forme $1 + 2^n$ est-elle illimitée? Ou autrement, y a-t-il une infinité de nombres impairs par lesquels une circonférence peut être divisée en parties égales au moyen de la règle et du compas?
(LIONNET, N. A., 882.)

178. Y a-t-il au moins deux nombres premiers parmi les entiers compris entre les carrés de deux entiers consécutifs?
(LIONNET, N. A., 885.)

179. Tout nombre premier $p = 8q + 1$ prend, d'une seule manière, les deux formes

$$p = x^2 + 16y^2, \qquad p = t^2 + 8u^2.$$

---

triple de tout carré impair, non divisible par 5, est égal à la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que 2 et 5 ».
(*Note de Catalan.*)

Pour q impair, ou $p = 16r + 9$, des deux nombres y, u, l'un est pair, l'autre impair.

Pour q pair, ou $p = 16r + 1$, les nombres y et u sont tous deux pairs, ou tous deux impairs.

(Le Besgue, N. A., **1046**.)

(*Moret-Blanc*, **75**, 73.)

180. Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à A.

(Lionnet, N. A., **1075**.)

(*Brocard, Lionnet*, **76**, 330, 473.)

181. Si un nombre premier P est égal à la somme de trois carrés, P^2 est généralement égal aussi à la somme de trois carrés; il ne pourrait y avoir exception que si P était décomposable en deux carrés (1). (Catalan, N. A., **1128**.)

(*Le Besgue*, **74**, 111.)

182. Le nombre des groupes de cinq impairs consécutifs, dont quatre sont des nombres premiers, est-il illimité?

(Lionnet, N. A., **1407**.)

183. Prouver que $2^{31} - 1$ et $2^{127} - 1$ sont des nombres premiers. (Ed. Lucas, N. C., 92) (2).

---

(1) Encore n'est-il pas sûr que ce cas d'exception puisse se présenter : le nombre premier $29 = 16 + 9 + 4 = 25 + 4$; néanmoins $29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2$.

(*Note de l'Auteur.*)

(2) Si l'on admet ces deux propositions, et si l'on observe que $2^2 - 1$, $2^4 - 1$, $2^7 - 1$ sont aussi des nombres premiers, on a ce théorème empirique :

Jusqu'à une certaine limite, si $2^n - 1$ est un nombre premier p, $2^p - 1$ est un nombre premier p', $2^{p'} - 1$ est un nombre premier p'', etc.

Cette proposition a quelque analogie avec le théorème suivant, énoncé par Fermat, et dont Euler a montré l'inexactitude :

Si n est une puissance de 2, $2^n + 1$ est un nombre premier.

(*Note de Catalan.*)

184. On forme les entiers r_0, r_1, r_2, ... d'après la relation

$$r_{n+1} = r_n^2(r_n - 3) + 3 \qquad (r_0 = 1);$$

et l'on prend les résidus suivant le module

$$M = 2.3^{4n+2} + 1.$$

Cela posé, M est premier si le premier résidu nul occupe le rang $4n + 2$; M n'est pas premier si aucun des résidus dont le rang est égal ou inférieur à $4n + 2$ n'est égal à zéro.

Exemple numérique. — Soit $n = 1$, $M = 1459$, on a les résidus

$$1, \quad 4, \quad 19, \quad -57, \quad 569, \quad -212, \quad 0.$$

Donc le nombre 1459 est premier. (Ed. Lucas, N. C., 350.)

185. *Théorème empirique.* — Les nombres

$$2^2 + 1, \quad 2^4 + 1, \quad 2^{16} + 1, \quad 2^{256} + 1, \quad \ldots$$

sont premiers. (Gelin, N. C., 363.)

186. Le nombre $2^k + 1$ est premier ou composé, suivant qu'il divise ou qu'il ne divise pas $3^{2k-1} + 1$ ($k = 2^n$).

(Proth, N. C., 453.)

(*Ed. Lucas*, **79**, 137) [1].

187. Le nombre $2^{4p} - 2^p + 1$ est toujours composé si

$$p = 2n + 1. \quad \text{(Proth, N. C., 454.)}$$

(*Jamet, Ed. Lucas*, **79**, 108, 138.)

188. Soit n le plus grand entier contenu dans $\sqrt{p}$. Le nombre p est premier ou non, selon que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction rationnelle

$$\frac{x^4}{1 - x^2} + \frac{x^9}{1 - x^3} + \ldots + \frac{x^{(n^2)}}{1 - x^n}$$

---

[1] Généralisation.

s'annule avec x ou ne s'annule pas. Le théorème subsiste si l'on supprime chaque terme de la forme $\frac{x^{(\alpha^2)}}{1-x^\alpha}$, où α est un nombre composé. (RADICKE, N. C., 559.)

(*Catalan*, **80**, 254.)

189. Quelle que soit la base de numération, aucun des nombres représentés par

10101, 101010101, 1010101010101

n'est premier. (CATALAN, M., 804.)

(*Bergmans*, **93**, 144.)

190. La formule $N = 1 + x + x^2$ (¹) donne les nombres premiers

3, 7, 13, 31, 43, 73, 157, 193, ...

En donne-t-elle une infinité? (CATALAN, M., 825.)

191. On considère le nombre 1001. A gauche et à droite de ce nombre, on écrit :

1° $p - 2$ zéros;
2° Le nombre 101;
3° $p - 1$ zéros;
4° L'unité.

Le nombre ainsi formé n'est jamais premier.

(DE LONGCHAMPS, J. E., 539.)

(*Droz-Farny*, **94**, 235.)

192. Si l'on écrit l'unité à la gauche et à la droite de $3n - 1$ zéros, le nombre ainsi obtenu n'est jamais premier.

(DE LONGCHAMPS, J. E., 540.)

(*Tzitzéica*, **94**, 235.)

(¹) Dans cette formule, on peut supposer x non carré.

(*Note de l'Auteur.*)

ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Premier degré.

193. Le nombre de solutions positives entières de l'équation

$$ax + by = n,$$

où a, b, n sont des nombres positifs entiers, est le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n}{ab}$ ou dans $\frac{n}{ab} + 1$.

(HERMITE, N. A., **421**.)

(*Rassicod*, **58**, 126.)

194. Si n est un nombre entier quelconque, l'un des quatre nombres $n^2 - 1$, $n^2 - 4$, $n^2 + 3$ est divisible par 12, et le quotient marque le nombre des solutions différentes de l'équation indéterminée $x + y + z = n$, en nombres entiers et positifs dont aucun n'est nul. (VACHETTE, N. A., **826**.)

(*Bignon*, **69**, 415.)

195. Démontrer que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$x + y + z = \mathrm{N},$$

sous les conditions

$$x \gtreqless y + z,$$
$$y \gtreqless z + x,$$
$$z \gtreqless x + y,$$

est

$$\frac{\mathrm{N}^2 + 1}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{(\mathrm{N} + 2)(\mathrm{N} + 4)}{8},$$

suivant que N est pair ou impair. (HERMITE, N. A., **889**.)

(*Schlegel*, **69**, 91.)

196. Si l'on considère les solutions entières (non négatives) de chacune des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de $n + 2$ sur le nombre des diviseurs de $n + 2$.

Exemple. — Soit $n = 10$; la première des équations admet cinq solutions; la seconde n'en admet qu'une seule; les équations suivantes sont impossibles; le nombre total des solutions est donc 6.

Or, 12 admet 6 diviseurs, et $12 - 6 = 6$.

(CATALAN, N. A., **1428.**)

(*Cesàro,* **83**, 380.)

197. Le nombre total des solutions entières non négatives des équations

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3(n - 1), \\ 4x + 9y &= 5(n - 2), \\ 9x + 16y &= 7(n - 4) \end{aligned}$$

est égal à n. (CESÀRO, N. A., **1495.**)

(*Goffart,* **84**, 539.)

198. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} x_1 + t &= a(x_2 + x_3), \\ x_2 + t &= (a + 1)(x_3 + x_4), \\ x_3 + t &= (a + 2)(x_4 + x_1), \\ x_4 + t &= (a + 3)(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

(LÉONARD DE PISE, N. C., **389.**)

199. Si l'on considère les solutions entières non négatives de

chacune des $(n+1)$ équations

$$x+2y=n, \qquad 2x+3y=n-1, \qquad 3x+4y=n-2, \qquad \ldots,$$
$$(n+1)x+(n+2)y=0,$$

le nombre total de ces solutions est $(n+1)$.

(CATALAN, M., **153**.)

(*Cesàro*, **83**, 87; **86**, 32.)

200. Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$x+4y=3n-1, \quad 4x+9y=5n-4, \quad 9x+16y=7n-9, \quad \ldots$$

est égal à n. (CESÀRO, M., **189**.)

(*Gillet*, **85**, 59; **86**, 32.)

201. Combien de solutions distinctes admet l'équation

$$x+y+z=n+2,$$

les indéterminées x, y, z ayant des valeurs égales ou inégales choisies parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$?

(DE BOZOKY, M., **631**.)

(*Bellens*, **89**, 125.)

Deuxième degré; équations à résoudre; problèmes.

202. Trouver des nombres rationnels satisfaisant aux deux équations

$$x^2+y^2-1=z^2,$$
$$x^2-y^2-1=u^2.$$

(LILAVATI, N. A., **206**.)

(*Clere*, **50**, 116; *Genocchi*, **51**, 80; **75**, 178; *Pepin*, **75**, 63.)

203. Résoudre le système d'équations

$$ax-by=x^2-y^2, \qquad bx+ay=4xy,$$

les nombres connus a, b satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a+b=c^3, \qquad a-b=d^3 \quad \text{(N. A., 543.)}$$

(*De Virieu*, **61**, 122.)

204. 1° Trouver deux entiers n et $p(n<p)$ tels qu'on ait

$$1+2+\ldots+n=(n+1)+\ldots+p.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel que son carré augmenté de 1 soit égal au double d'un carré;

Ou :

Trouver deux entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit égale à un carré.

2° Trouver deux entiers n et p tels qu'on ait

$$1+2+\ldots+n=p^2.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel que son carré diminué de 1 soit égal au double d'un carré;

Ou :

Trouver deux entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit égale à un carré augmenté de 1.

(LAISANT, N. A., **953**.)

(*Moret-Blanc*, **72**, 173.)

205. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2+y^2=u^2+v^2+1.$$

(CATALAN, N. A., **1475**.)

(*Fauquembergue*, **84**, 346.)

206. Trouver une infinité de valeurs entières de v, x, y, z, telles que l'expression

$$v^2-v(x+y+z)+xy+yz+zx$$

soit égale au double d'un carré.

Exemples :

$$1^2 - 1.(-1+3+4) - 1.3 + 3 + 4 - 4.1 = 0,$$
$$1^2 - 1.(1+1+2) + 1.1 + 1.2 + 2.1 = 2.1^2,$$
$$9^2 - 9(1+8+8) + 1.8 + 8.8 + 8.1 = 2.2^2,$$
$$(-1)^2 + 1.(0+1+8) + 1.8 = 2.3^2,$$
$$3^2 - 3(2+6+7) + 2.6 + 6.7 + 7.2 = 2.4^2,$$
$$9^2 - 9(7+8+8) + 7.8 + 8.8 + 8.7 = 2.5^2,$$
$$1^2 - 1.(1+8+9) + 1.8 + 8.9 + 9.1 = 2.6^2,$$
$$(-1)^2 + 1.(1+8+8) + 1.8 + 8.8 + 8.1 = 2.7^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(S. Realis, N. C., 539.)

(*Cesàro*, **80**, 273.)

207. Trouver, par des formules directes, une infinité de valeurs entières de x, y, z, telles que l'expression

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

se réduise à un carré pair, assigné d'avance.

Exemple. — Le carré donné étant 36, on a

$$2(2.5 + 5.5 + 5.2) - (2^2 + 5^2 + 5^2) = 36,$$
$$2(2.5 + 5.9 + 9.2) - (2^2 + 5^2 + 9^2) = 36,$$
$$2(1.9 + 9.10 + 10.1) - (1^2 + 9^2 + 10^2) = 36,$$
$$2(1.10 + 10.13 + 13.1) - (1^2 + 10^2 + 13^2) = 36,$$
$$2(1.13 + 13.18 + 18.1) - (1^2 + 13^2 + 18^2) = 36,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(S. Realis, M., 48.)

(*Rochetti*, **81**, 165.)

208. Trouver une infinité de solutions entières de chacune des équations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 7(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 19(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 67(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(Catalan, M., 58.)

(*S. Realis*, **82**, 64.)

209. Quels sont les polygones dont le nombre des diagonales est un carré? (De Rocquigny, M., **282**.)

(*Jamet*, **86**, 162.)

210. Trouver n nombres entiers consécutifs dont la somme soit le double d'un carré. (De Rocquigny, M., **524**.)

(*Jamet*, **86**, 277.)

211. Trouver pour a et b des valeurs entières telles que l'expression

$$\frac{249a^2}{113a+89b}$$

se réduise à un nombre entier. (M., **650**.)

(*Jamet*, **89**, 278.)

212. Trouver pour x une valeur entière qui rende carrés parfaits les expressions $4x+5$, $5x+4$. (M., **654**.)

(*Emmerich*, **90**, 174.)

213. Assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(2a^2-2a-1)x^2-4(a^2-1)xy+(2a^2+2a-1)y^2=1,$$

dans laquelle a est un entier donné.

Note. — On trouvera deux séries de solutions; l'une commence par les systèmes de valeurs

$$\begin{cases} x=a+1, \\ y=a, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3a+4, \\ y=3a+1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=11a+15, \\ y=11a+4, \end{cases} \quad \ldots.$$

L'autre série se déduit de la précédente, en observant que, si l'on change a en $-a$, l'équation demeure la même, à l'échange

près des indéterminées l'une dans l'autre. On a donc encore, pour la proposée, les solutions

$$\begin{cases} x = a, \\ y = a - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 1, \\ y = 3a - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a - 4, \\ y = 11a - 15, \end{cases} \quad \ldots, \quad \ldots.$$

(S. Realis, J. S., **140**.)

(*Ferval*, **89**, 94.)

214. On propose d'assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(a^2 - a - 1)x^2 - (2a^2 - 3)xy + (a^2 + a + 1)y^2 = 1,$$

a étant un entier donné.

Note. — On trouvera, en outre des valeurs initiales $x = 1$, $y = 1$, les deux séries de solutions

$$\begin{cases} x = a + 2, \\ y = a + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 5, \\ y = 3a + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a + 13, \\ y = 8a + 5, \end{cases} \quad \ldots,$$

$$\begin{cases} x = a - 1, \\ y = a - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 5, \\ y = 3a - 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a - 5, \\ y = 8a - 13, \end{cases} \quad \ldots,$$

se déduisant l'une de l'autre, comme dans la question précédente. (S. Realis, J. S., **141**.)

(*Ferval*, **89**, 118.)

215. 1° Trouver les nombres qui sont à la fois triangulaires et pentagonaux; c'est-à-dire : résoudre en nombres entiers l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(3y \mp 1)}{2}.$$

2° *Théorème.* — Tout nombre triangulaire, s'il n'est pas pentagonal, est la somme de moins de sept nombres pentagonaux.

3° *Théorème.* — Si, au double d'un nombre triangulaire, on

ajoute un carré, on obtient la somme de deux nombres triangulaires (l'un de ceux-ci peut être nul) [1].

4° Dans quel cas a-t-on

$$C_{n,p} = C_{n-1,p+1} \text{ [2]}.$$

(CATALAN, J. S., 353.)

216. Donner explicitement toutes les valeurs entières de n pour lesquelles :

1° $2n^2 - 1$ est un carré parfait;

2° $2n^2 + 1$ est un carré parfait. (E. LEMOINE, J. S., 360.)

(*Catalan*, **93**, 22.)

217. Trouver toutes les valeurs rationnelles de a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' qui satisfont aux équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \qquad ca + c'a' + c''a'' = 0.$$

(CATALAN, J. S., 371.)

Deuxième degré; propriétés.

218. Supposons que z^2 puisse se décomposer de n manières en produits de facteurs inégaux ($1 . z^2$ compris); démontrer que $4z^2$ peut se décomposer de n manières et pas davantage en différence de deux carrés entiers. (N. A., 542.)

(*Kessler*, **60**, 434.)

---

(1) Presque évident. (*Note de l'Auteur.*)

(2) On trouve en particulier

$$C_{104,19} = C_{103,10}, \qquad C_{214,272} = C_{213,273}.$$

(*Note de l'Auteur.*)

219. Démontrer que l'équation

$$x^2 + y^2 = pz^2$$

est impossible en nombres rationnels, lorsque p est de la forme

$$4n + 3 \text{ (1)}.$$ (JOUBERT, N. A., **551**.)

(*Kaminsky*, **61**, 97.)

220. Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ sont des entiers $< p$ et non divisibles par p. On représente par S_m^0, S_m le nombre des solutions des équations indéterminées

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 = py,$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py,$$

en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_m$ parmi les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1.$$

On demande la démonstration des formules

(1) $$(p-1)S_m = S_{m+1}^0 - S_m^0,$$

(6) $$S_m^0 - p^{m-1} = p(S_{m-2}^0 - p^{m-3})\left(\frac{-a_{m-1}a_m}{p}\right),$$

(2) $$S_1^0 - 1 = 0,$$

(4) $$S_2^0 - p = (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

(3) $$S_1 - 1 = \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

(7) $$S_{2n+1}^0 - p^{2n} = 0,$$

(8) $$S_{2n}^0 - p^{2n-1} = p^{n-1}(p-1)\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

(9) $$S_{2n} - p^{2n-1} = -p^{n-1}\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

(10) $$S_{2n+1} - p^{2n} = \left[\frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}}{p}\right].$$

---

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres.* In-4° de 35 pages; 1860. Savant travail faisant suite aux travaux de MM. Hermite et Kronecker sur la limite du

Les numéros indiquent l'ordre à suivre dans les démonstrations, qui sont fort simples [1]. (LE BESGUE, N. A., 759.)

(*Pepin*, **71**, 227.)

221. L'équation indéterminée $t^2 - Dn^2 = 4$, dans laquelle D est de la forme $(4n+2)^2+1$, n désignant un nombre entier positif quelconque 1, 2, 3, ..., n'a aucune solution formée de deux nombres impairs, et la solution constituée par les deux nombres entiers positifs les plus petits est

$$t = 16(2n-1)^2 - 2,$$
$$u = 8(2n-1).$$

(F. DIDON, N. A., **1055**.)

(*Moreau*, **73**, 330.)

222. Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient sur le côté de la base 1, 2 ou 48.

(ED. LUCAS, N. A., **1194**.)

(*Meyl*, **78**, 464.)

223. Dans toute solution, en nombres entiers, de l'équation indéterminée $24x^2+1=y^2$, le produit des valeurs des deux inconnues est multiple de 5. N. A., **1274**.)

(*De Virieu*, **78**, 476.)

224. Démontrer :

1° Que les solutions entières et positives de l'équation

$$24x^2+1=y^2,$$

---

nombre de certaines classes des *déterminants;* au delà de cette limite, le nombre des classes quadratiques surpasse nécessairement un nombre donné : une des questions les plus ardues de l'arithmologie et qui n'est pas encore complètement résolue. (*Note de la Rédaction.*)

[1] M. Camille Jordan a donné ces formules et en a indiqué la vérification dans les *Comptes rendus* du 19 mars 1866. Dans les *Comptes rendus* du 1er avril, M. Le Besgue a montré que ces formules revenaient à celles qu'il a données dans le tome II (1837) du *Journal de M. Liouville.*

(*Note de Prouhet.*)

dont les deux premières sont $x = 0$ et $y = 1$; $x = 1$ et $y = 5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de dix fois la dernière pour obtenir la suivante;

2° Que les solutions entières et positives de l'équation

$$2x^2 + 1 = 3y^2,$$

dont les deux premières sont $x = 1$ et $y = 1$; $x = 11$ et $y = 9$, s'obtiennent comme celles de l'équation précédente (1°);

3° Que toute valeur du nombre $X = 3x^2 + 2$ (2°), ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de trois entiers consécutifs et à celle des carrés de deux entiers consécutifs, est de la forme $360n + 5$. (LIONNET, N. A., **1335**.)

(*Rochetti*, **81**, 425.)

225. Démontrer que les solutions entières et positives de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$, dont les deux premières sont $x = 1$, et $y = 1$, $x = 7$ et $x = 5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de six fois la dernière pour obtenir la suivante.

(LIONNET, N. A., **1338**.)

(*Pisani*, **81**, 373.)

226. a, x, y étant des nombres entiers, chaque valeur de x qui vérifie l'équation

$$(a^2 + 1)x^2 = y^2 + 1$$

est la somme de trois carrés. Il y a exception pour $x = 1$ et pour $x = 4a^2 + 1$. (CATALAN, N. A., **1474**.)

(*Fauquembergue*, **84**, 538.)

227. Quels que soient les nombres entiers a, b, c, l'équation indéterminée $xy + ax + by = c$ admet au moins deux systèmes de solutions entières. (BROCARD, M., **612**.)

(*Beyens*, **88**, 213.)

228. Démontrer que l'équation

$$x^2 = y^2 + z^2$$

admet une infinité de solutions en nombres entiers; la somme $x + y$ étant un bicarré [1]. (De Longchamps, J. E., 426.)

(*Svechnikoff*, **92**, 282.)

Troisième degré; équations à résoudre; problèmes.

***229.** Déterminer des valeurs entières des quantités x, n, r : 1° telles que la somme

$$x^3 + (x + r)^3 + \ldots + [x + (n - 1)r]^3$$

soit un cube; 2° telles que cette somme soit le cube de $x + nr$.
(Boncompagni, N. A., 703.)

230. Trouver trois nombres entiers en progression géométrique, tels que chacun d'eux, augmenté d'une unité, donne un carré. (A. Martin, N. A., 1032.)

231. Déduire d'une même identité une infinité de solutions en nombres entiers de chacun des deux systèmes

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3, \\ xyz = uvt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3, \\ x + y + z = u + v + t. \end{cases}$$

(Desboves, N. A., 1310.)

---

[1] Ce problème ne doit pas être confondu avec celui de Fermat dans une remarque relative au Traité des doubles égalités de Bachet.

Le problème de Fermat consiste à trouver un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers de telle sorte que l'hypoténuse soit un carré parfait ainsi que la somme des deux côtés de l'angle droit. On trouvera une solution de ce problème dans les Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante (p. 27), par E. Lucas. (*Note de l'Auteur.*)

232. Trouver un nombre positif ayant la double propriété d'être égal au produit de trois entiers consécutifs et à celui de deux entiers consécutifs. (LIONNET, N. A., **1349.**)

(*Moret-Blanc,* **81**, 431.)

233. Trouver un nombre positif ayant la triple propriété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de deux entiers consécutifs, le plus petit des deux facteurs de cette moitié étant lui-même égal au produit de deux entiers consécutifs.

(LIONNET, N. A., **1350.**)

(*Moret-Blanc,* **81**, 375.)

234. Trouver les solutions entières de l'équation

$$x^3 + x^2 + x + 1 = v^2.$$

(LIONNET, N. A., **1476.**)

(*Fauquembergue,* **84**, 538.)

235. Dans quels cas la somme des cubes de sept nombres entiers consécutifs est-elle un carré parfait?

(ED. LUCAS, N. C., **90.**) (1)

236. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^3 - x = 100y.$$ (BROCARD, N. C., **97.**)

(*Gelin,* **77**, 121.)

237. Pour quelles valeurs de p et de q l'équation

$$x^3 + y^3 = 2^p . 3^q . z^3$$

est-elle résoluble en nombres entiers? Déterminer les plus petites solutions, en supposant l'inconnue z égale à un nombre pair ou à un nombre impair. (ED. LUCAS, N. C., **133.**)

---

(1) A propos de cette question, on peut consulter la Note sur un Problème d'analyse indéterminée (*Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei,* 1866 et 1867). (*Note de Catalan.*)

238. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^3 + (2a + 1)(x - 1) = y^2.$$

(BROCARD, N. C., **168**.)

(*Brocard*, **77**, 23.)

239. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^3 + 17 = y^2. \quad \text{(BROCARD, N. C., 171.)}$$

[*Rey*, **77**, 25; *Lemière*, **77**, 49 (¹).]

240. Trouver les solutions entières de l'équation

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \ldots + z_n^3 = (5n + 3)z^3.$$

Note. — Parmi les solutions entières dont l'équation est susceptible, il en existe une dans laquelle la valeur de z, au second membre, est égale à l'unité (en exceptant le cas où $n = 2$), et une autre dans laquelle les valeurs de $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, au premier membre, se suivent en progression par différence.

Dans le cas spécial de $n = 2$, la solution la plus simple de l'équation

$$z_1^3 + z_2^3 = 13z^3$$

est donnée par l'égalité

$$2^3 + 7^3 = 13.3^3.$$

(S. REALIS, N. C., **598**.)

***241.** Trouver les valeurs, entières et positives, qui vérifient l'équation

$$x^3 + 2 = y^2. \quad \text{(GERONO, N. C., 599.)}$$

242. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2 + y^2 = (x - y)^3.$$

(DE ROCQUIGNY, M., **560**.)

(*Stevart*, **87**, 146.)

(¹) *Voir* surtout cette seconde solution.

243. Trouver $2n+1$ nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des $(n+1)$ premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des n nombres suivants.

(DOSTOR, J. M., **205**.)

(*Deslais*, **80**, 398.)

Troisième degré; propriétés.

244. Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré ni le double d'un carré [1].

(FAURE, N. A., **386**.)

(**57**, 288.)

***245.** Le nombre figuré par 1121 ne peut être un carré parfait dans aucun système de numération. (ROUCHÉ, N. A., **528**.)

246. Deux cubes étant premiers entre eux et se terminant (à droite) par les trois mêmes derniers chiffres significatifs, démontrer que les deux racines cubiques ont aussi les trois derniers chiffres communs dans un système quelconque de numération.

(ROUCHÉ, N. A., **529**) [2].

(*Pepin*, **67**, 492.)

247. Le système des deux équations

$$x^2 = ay^2 + 1, \qquad x^3 = by^3 + c,$$

dans lesquelles $a+1$ et c sont des multiples de 3, et b un nombre entier non divisible par 3, n'admet aucune solution entière.

(N. A., **630**.)

(*Delorme*, **62**, 455) [3].

248. Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre

---

(1) Le produit de tant de nombres consécutifs qu'on veut ne peut être une puissance parfaite d'aucun nombre. (*Note de Terquem.*)

(2) Dans sa rédaction, le théorème énoncé n'est pas exact. *Voir* la solution indiquée.

(3) Généralisation.

de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base. (Ed. Lucas, N. A., **1180**.)

[*Moret-Blanc*, **76**, 46; *Ed. Lucas*, **76**, 528 (1); **77**, 429.]

249. Démontrer :

1° Que si une solution de l'équation indéterminée

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = 0$$

est donnée par l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

on obtient une nouvelle solution en faisant

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\beta + \gamma + \delta) - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2, \\ v &= \beta(\alpha + \gamma + \delta) - \alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2, \\ x &= \gamma(\alpha + \beta + \delta) + \alpha^2 + \beta^2 - \delta^2, \\ y &= \delta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2; \end{aligned}$$

2° Que, si l'on part de cette seconde solution pour en obtenir une troisième par le même procédé, on retombera, à un facteur commun près, sur les valeurs α, β, γ, δ.

(S. Realis, N. A., **1295**.)

(*Sondat*, **79**, 378.)

250. Si les égalités

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 = 0, \qquad A\alpha'^3 + B\beta'^3 + C\gamma'^3 = 0$$

représentent deux solutions connues, distinctes, de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

une troisième solution sera donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= B\beta\beta'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + C\gamma\gamma'(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma), \\ y &= C\gamma\gamma'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + A\alpha\alpha'(\beta\alpha' - \beta'\alpha), \\ z &= A\alpha\alpha'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + B\beta\beta'(\gamma\beta' - \gamma'\beta). \end{aligned}$$

(S. Realis, N. A., **1296**.)

(*Sondat*, **80**, 458; *Desboves*, **81**, 173.)

---

(1) *Voir* surtout cette solution; celle de Moret-Blanc n'est pas irréprochable.

251. La somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Ed. Lucas, N. A., **1299**.)

(*Moret-Blanc*, **79**, 470.)

252. La somme des x premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Ed. Lucas, N. A., **1300**.)

(*Moret-Blanc*, **79**, 474.)

253. On peut trouver toujours deux entiers t et u, tels que

$$At^3 + Bu^2 + C$$

soit divisible par 7, A, B et C étant trois entiers positifs ou négatifs non divisibles par 7. (Pellet, N. A., **1404**.)

(*Moret-Blanc*, **82**, 475.)

254. Démontrer que, si les deux racines de l'équation

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

sont entières, l'équation indéterminée

$$\text{(A)} \qquad x^3 + k = y^2,$$

dans laquelle on a pris

$$k = [(\alpha + 1)^3 - (\beta + 1)^2]z,$$

admet toujours une solution entière.

Exemples : 1° Pour $\alpha = a^2$,

$$\beta = \pm a^3,$$

d'où

$$z = 3a^2, \qquad k = 3a^4(3a^2 \mp 2a + 3),$$

l'équation (A) est vérifiée par

$$x = -2a^2, \qquad y = a^2(a \mp 3);$$

2° Pour $\alpha = 2$,

$$\beta = \pm 1,$$

d'où

$$z' = 7, \qquad z'' = -1.$$

Les équations

$$x^3 + 161 = y^2, \qquad x^3 - 23 = y^2;$$
$$x^3 + 189 = y^2, \qquad x^3 - 27 = y^2$$

admettent respectivement les solutions

$$-5^3 + 161 = 6^2, \qquad 3^3 - 23 = 2^2;$$
$$-5^3 + 189 = 8^2, \qquad 3^3 - 27 = 0.$$

3° Pour $\alpha = 32$,

$$\beta = \pm 64,$$

d'où

$$z' = 224, \qquad z'' = 128;$$

on a les résultats

$$-192^3 + 7103488 = 160^2, \qquad 160^3 - 4059136 = 192^2,$$
$$-192^3 + 7160832 = 288^2, \qquad 160^3 - 4091904 = 64^2,$$

qui équivalent, respectivement, à

$$-48^3 + 110992 = 20^2, \qquad 10^3 - 991 = 3^2;$$
$$-48^3 + 111888 = 36^2, \qquad 10^3 - 999 = 1^2.$$

Nota. — L'équation en z, mise sous la forme

$$\alpha^3 + (3\alpha - z)z = \beta^2$$

et supposée vérifiée par des valeurs entières de α, β, z, constitue par elle-même une solution entière de (A), pour une infinité de valeurs de k, comprises dans l'expression $(3\alpha - z)z$.

Le résultat le plus simple à obtenir par cette voie consiste dans l'égalité évidente

$$2^3 - 7 = 1^2.$$

(S. Realis, N. A., **1451**.)

(*Fauquembergue*, **85**, 379.)

255. L'expression

$$8\beta - 3(\alpha^2 + 2\alpha) + 1$$

se réduisant à un carré pour des valeurs entières de α et β, l'équa-

tion indéterminée

$$x^3 - (\alpha^3 - \beta^2) = y^2$$

est résoluble en nombres entiers x, y, indépendamment de la solution immédiate

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

Exemples : Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, valeurs satisfaisant à la condition indiquée, l'équation devient

$$x^3 + 1 = y^2$$

et admet les solutions

$$x = -1, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 2, \qquad y = 3,$$

en outre de la solution immédiate

$$x = 0, \qquad y = 1.$$

Pour $\alpha = -2$, $\beta = \dfrac{a^2 + a}{2}$, l'équation

$$x^3 + \left(\frac{a^2 + a}{2}\right)^2 + 8 = y^2$$

admet les solutions

$$x = -a + 1, \qquad x = a + 2,$$
$$y = \frac{a^2 - a}{2} + 3, \qquad y = \frac{a^2 + 3a}{2} + 4,$$

en outre de la solution immédiate

$$x = -2, \qquad y = \frac{a^2 + a}{2}.$$

(S. Realis, N. A., **1452**.)

(*Brocard*, **91**, 7*.)

256. Le cube d'un nombre entier, autre que l'unité, ne peut être la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

(N. A. **1459**.)

(*Fauquembergue*, **83**, 430.)

*257. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est jamais un carré, excepté si $n = 24$.

(Ed. Lucas, N. C., 76.)

258. La somme de deux cubes consécutifs n'est jamais un carré, excepté si ces cubes sont 1 et 8.

(Ed. Lucas, N. C., 80, M., 458.)

(*Fauquembergue*, M., 87, 200.)

259. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré [1]. (Ed. Lucas, N. C., 81; M. 459.)

(*Fauquembergue*, M., 88, 21.)

*260. Si x, y, z désignent des nombres entiers satisfaisant à l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3,$$

on obtient une nouvelle solution par les formules

$$\begin{aligned} X &= x^9 - y^9 + 3x^3y^3(2x^3 + y^3), \\ Y &= y^9 - x^9 + 3y^3x^3(2y^3 + x^3), \\ Z &= 3xyz(x^6 + x^3y^3 + y^6). \end{aligned}$$

Faire voir qu'elles sont plus générales que les formules attribuées à Euler. (Ed. Lucas, N. C., 134.)

*261. Trouver des formules analogues pour la résolution de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 3Dxyz.$$

(Ed. Lucas, N. C., 135.)

---

(1) Ces curieux théorèmes, dont M. Lucas n'a pas fait connaître les démonstrations, sont extraits d'un Mémoire intitulé : *Recherches sur l'Analyse indéterminée*. La propriété dont jouissent les nombres 8 et 9 a donné lieu au théorème empirique suivant : Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes. *Voir* nos *Mélanges mathématiques*, les *Nouvelles Annales*, etc.

(*Note de Catalan.*)

*262. Tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9. (TAIT, N. C., 182.)

263. L'équation

$$x^2 + 3 = y^3$$

est impossible en nombres entiers. (PROTH, N. C., 296.)

(*Ed. Lucas,* **78**, 121.)

264. L'équation

$$x^2 - 3 = y^3$$

est impossible, excepté pour $x = 2$, $y = 1$.

(PROTH, N. C., 297.)

(*Ed. Lucas,* **78**, 121, 224.)

265. Le seul nombre entier, premier avec 5, dont le cube, diminué de 13, soit le quadruple d'un triangulaire, est 17.

(CESÀRO, M., 502.)

(*Fauquembergue,* **87**, 257.)

Quatrième degré; équations à résoudre; problèmes.

266. Résoudre en nombres *entiers* et *positifs* l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2. \quad \text{(N. A., 1168.)}$$

(*Moreau, Ed. Lucas,* **75**, 335, 509.)

267. Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2 + 7x = 2y(y + 3)(y^2 + 3y + 5).$$

(LIONNET, N. A., 1303.)

(*Meyl,* **79**, 332.)

268. Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

(LIONNET, N. A., 1339.)

(*Lissençon,* **80**, 472.)

269. Résoudre complètement, en nombres rationnels, l'équation

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = y^2.$$

(Ed. Lucas, N. C., 82.)

270. Pour quelles valeurs de n la somme des cubes des n premiers nombres impairs est-elle un carré parfait?

(Ed. Lucas, N. C., 86.)

(*Brocard*, **77**, 167, 248.)

271. Pour quelles valeurs de n la somme des boulets des n premières piles, à base carrée, est-elle un carré parfait?

(Ed. Lucas, N. C., 313.)

272. Même question que la précédente, pour les piles triangulaires. (Ed. Lucas, N. C., 314.)

273. Dans quel cas la somme

$$-1^3 + 3^3 - 5^3 + \ldots + (4x-1)^3$$

est-elle un carré, un cube ou un bicarré?

(Ed. Lucas, N. C., 469.)

Quatrième degré; propriétés.

274. $4mn - m - 1$ ne peut jamais être un carré, soit entier, soit fractionnaire. (Goldbach, N. A., 248.)

(*Bédos*, **52**, 278, 326.)

275. Si l'équation $z^2 = x^4 + ay^2z^2 + bz^4$ est résolue par

$$r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4,$$

elle le sera aussi par

$$x = r^4 - (a^2 - 4b)t^4u^4, \qquad y = t^4 - bu^4, \qquad z = 2rtu.$$

(A. Le Besgue, N. A., 631.)

(*Le Besgue*, **72**, 83.)

276. L'équation $x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = y^2$ est impossible en nombres entiers et positifs. (N. A., **1291**.)

(*Romero*, **79**, 328.)

277. Si (x, y, z) est une solution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 + dX^2Y^2 = cZ^2,$$

on aura toujours une solution en nombres entiers (x_1, y_1, z_1) de l'équation

$$X^4 + abc^2Y^4 + cdX^2Y^2 = Z^2$$

par les formules

$$x = ax^4 - by^4, \qquad y_1 = 2xyz, \qquad z_1 = c^2z^4 + (4ab - d^2)a^4y^4.$$

Les formules de Le Besgue sont la conséquence évidente des précédentes. (Desboves, N. A., **1324**.)

[*Moret-Blanc*, **80**, 461; *Desboves*, **81**, 173 (¹)].

278. Déterminer une valeur de z, telle que, en y joignant les valeurs

$$v = 2(\alpha + \beta)(391\alpha^2 - 730\alpha\beta + 391\beta^2),$$
$$x = 2057\alpha^3 - 2541\alpha^2\beta + 2787\alpha\beta^2 - 371\beta^3,$$
$$y = 391\alpha^3 - 2787\alpha^2\beta + 2541\alpha\beta^2 - 2057\beta^2,$$

on satisfasse à l'équation

$$v^4 + x^4 + y^4 = 2z^2.$$

On trouvera ainsi, par exemple, en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, et supprimant les facteurs communs, l'égalité

$$46^4 + 121^4 + 23^4 = 2.10467^2.$$

(¹) Voir surtout cette seconde solution.

De même, en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 1$,

$$26^4 + 239^4 + 239^4 = 2.57123^2, \quad \ldots, \text{(}^1\text{)}.$$

(S. Realis, N. C., 553.)

279. Une solution particulière de l'équation indéterminée

$$v^4 + x^4 + y^4 = 2z^2$$

étant représentée par l'égalité

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2\delta^2;$$

démontrer que l'on a également une solution en posant

$$\begin{aligned} v &= -14\alpha^3 - 8\alpha^2(\beta+\gamma) + \alpha(13\beta^2 - \beta\gamma + 13\gamma^2) \\ &\quad - 18(\beta^3+\gamma^3) + 3\delta(7\alpha + 2\beta + 2\gamma), \\ x &= \quad 4\beta^3 - \beta^2(8\alpha+\gamma) + \beta(22\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 13\gamma^2) \\ &\quad - 9(2\alpha^3+\gamma^3) + 3\delta(8\alpha - 8\beta + \gamma), \\ y &= \quad 4\gamma^3 - \gamma^2(8\alpha+\beta) + \gamma(22\alpha^2 - 8\alpha\beta + 13\beta^2) \\ &\quad - 9(2\alpha^3+\beta^3) + 3\delta(8\alpha + \beta - 8\gamma), \end{aligned}$$

et compléter cette solution, en assignant l'expression de z, en fonction de α, β, γ, δ.

Exemples de solutions associées

$$\left\{\begin{aligned} 1^4 + (-1)^4 + 0 &= 2.1^2, \\ 10^4 + 1^4 + 3^4 &= 2.71^2; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 + 1^4 + 1^4 &= 2.1^2, \\ 12^4 + 7^4 + 7^4 &= 2.113^2; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2^4 + (-1)^4 + 1^4 &= 2(-3)^2, \\ 46^4 + 121^4 + 23^4 &= 2.10467^2; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} (-2)^4 + 1^4 + 1^4 &= 2(-3)^2, \\ 26^4 + 239^4 + 239^4 &= 2.57123^2; \end{aligned}\right.$$

(S. Realis, N. C., 554.)

---

(1) *Voir* **78**, 350, une solution analogue pour l'équation

$$v^4 + x^4 + y^4 = 3z^2.$$

(*Note de la Rédaction.*)

280. Une solution particulière de l'équation indéterminée

$$x^4 - 2y^4 = z^2$$

étant représentée par l'égalité

$$\alpha^4 - 2\beta^4 = \gamma^2,$$

démontrer que l'on a également une solution en posant

$$x = 3(339\alpha^3 + 392\beta^3) + 8\alpha\beta(216\alpha + 216\beta) + 7\gamma(113\alpha + 96\beta),$$
$$y = 4(147\alpha^3 - 226\beta^3) - 27\alpha\beta(5\alpha + 64\beta) + 7\gamma(108\alpha + 113\beta),$$

et compléter cette solution, par la détermination de la valeur de z, en fonction de α, β, γ.

Applications. — Pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, les formules ci-dessus donnent, après suppression d'un facteur commun,

$$x = 113, \qquad y = 84;$$

puis, pour $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 7$, il vient de la même manière

$$x = 57123, \qquad y = 6214, \qquad z = 5262580153.$$

(S. Realis, N. C., 596.)

281. Une solution particulière de l'équation indéterminée

$$x^4 - 3y^4 = 13z^2$$

étant représentée par l'égalité

$$\alpha^4 - 3\beta^4 = 13\gamma^2,$$

démontrer que l'on a également une solution en posant

$$x = 76\alpha^3 + 96\alpha^2\beta + 135\alpha\beta^2 + 156\beta^3 + 13\gamma(19\alpha + 12\beta),$$
$$y = 52\alpha^3 + 28\alpha^2\beta - 96\alpha\beta^2 - 57\beta^3 + 13\gamma(16\alpha + 19\beta),$$

et compléter cette solution par la détermination de la valeur de z en fonction de α, β, γ.

C'est d'après cela, par exemple, que les solutions

$$2^4 - 3.1^4 = 13.1^2,$$
$$4^4 - 3.3^4 = 13.1^2,$$
$$4^4 - 3.3^4 = 13(-1)^2$$

amènent, respectivement, les nouvelles solutions

$$1034^4 - 3.471^4 = 13.276719^2,$$
$$16^4 - 3.1^4 = 13.71^2,$$
$$712^4 - 3.79^4 = 13.140569^2.$$

(S. Realis, N. C., **597**.)

282. Aucune des équations

$$x^4 - p^3x + 3q^2 = 0,$$
$$x^4 - 2p^3x + 3q^2 = 0,$$

dans lesquelles p est un nombre pair, et q un entier différent de zéro, ne peut avoir une racine entière. (S. Realis, M., **173**.)

(*Fauquembergue*, **87**, 96.)

283. L'équation

$$x^4 - 4p^3x + 3q^2 = 0,$$

dans laquelle p et q sont des entiers premiers entre eux, q étant plus grand que l'unité, n'a pas de racine entière.

(S. Realis, M., **174**.)

(*Fauquembergue*, **87**, 96.)

284. α, β, γ étant des entiers quelconques, aucune des équations

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 5)x^2 - 2(\alpha\beta + 2\gamma)x + \beta^2 - 2\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 2)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 8)x^2 - 2(\alpha\beta + 5\gamma)x + \beta^2 - 5\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 13)x^2 - 2(\alpha\beta + 6\gamma)x + \beta^2 - 6\gamma^2 = 0,$$
$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - 10)x^2 - 2(\alpha\beta + 7\gamma)x + \beta^2 - 7\gamma^2 = 0$$

ne peut admettre de racine entière.

On excepte le cas insignifiant où, β et γ étant nuls à la fois, chaque équation admet la racine double $x = 0$.

(S. Realis, J. S., 66.)

285. α, β, γ, δ étant des entiers quelconques et β et γ n'étant pas nuls à la fois, l'équation

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta + 3\delta + 1)x^2 - 2(\alpha\beta + 3\gamma)x + \beta^2 - 3\gamma^2 = 0$$

n'a pas de racine entière. (S. Realis, J. S., 67.)

286. Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 3, aucune des deux équations

$$x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + \alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. (S. Realis, J. S., 159.)

[*S. Realis,* **88**, 90 (1).]

287. Démontrer que, α étant un nombre entier quelconque et β un entier premier avec 5, aucune des équations

$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^3 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^8 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x_4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une solution entière. (S. Realis, J. S., 160.)

(*S. Realis,* **88**, 90.)

288. Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 7, aucune des équations suivantes ne peut

(1) *Voir* aussi **85**, 115, une lettre fort intéressante de Realis.

avoir une racine entière

$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm \beta^2) x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2) x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 5\beta^2) x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta^2) x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 2\beta^2) x^2 - \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2) x^2 \pm \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2) x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 4\beta^2) x^2 + 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 6\beta^2) x^2 \mp 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0.$$

(S. Realis, J. S., **161**.)

(*S. Realis*, **88**, 90.)

289. Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 13, aucune des équations suivantes ne peut avoir une racine entière

$$x^4 + 4\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 17\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 17\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0.$$

(S. Realis, J. S., **162**.)

(*S. Realis*, **88**, 90.)

Cinquième degré.

290. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5.$$

Nombre des solutions entières et positives. (N. A., **714**.)

(*Murent*, **65**, 116.)

291. Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier.

(Ed. Lucas, N. A., **1195**.)

(*Moret-Blanc*, **81**, 330.)

292. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = y^2.$$

(Brocard, N. A., **1177**; N. C., **58**.)

[*Gerono*, N. A., **77**, 230; *Ed. Lucas*, N. C., **76**, 87 (1).]

293. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est ni un cube, ni une cinquième puissance.

(Ed. Lucas, N. C., **77**.)

(*Brocard, Ed. Lucas*, **77**, 166, 248.)

294. La somme des carrés des n premiers nombres impairs n'est ni un carré, ni un cube, ni une cinquième puissance.

(Ed. Lucas, N. C., **78**.)

(*Brocard, Ed. Lucas*, **77**, 166, 248.)

295. La somme des cubes des n premiers nombres impairs n'est ni un cube, ni un bicarré, ni une cinquième puissance.

(Ed. Lucas, N. C., **79**.)

(*Brocard, Ed. Lucas*, **77**, 167, 248.)

***296.** Pour quelles valeurs de n la somme des carrés des n premiers triangulaires, divisée par la somme des n premiers triangulaires, est-elle un carré parfait?

(Ed. Lucas, N. C., **315**.)

---

(1) Dans les solutions, Ed. Lucas fait remarquer que l'équation revient à celle-ci

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^2.$$

297. Démontrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

(J. M., **132**.)

(*H. Bourget*, **81**, 66.)

Degrés supérieurs au cinquième.

298. Démontrer que le produit de six nombres entiers consécutifs ne peut pas être un carré d'un nombre commensurable.

(N. A., **416**.)

(*Gerono*, **60**, 38.)

299. L'expression

$$6xy(3x^4+y^4),$$

dans laquelle x et y sont des entiers différents de zéro, ne peut jamais représenter un cube, ni le quadruple d'un cube.

(S. Realis, N. A., **1251**.)

(*S. Realis*, **78**, 468.)

300. Démontrer qu'il est impossible de résoudre, en nombres entiers, aucune de ces trois équations indéterminées :

$$(1)\qquad x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6+x_7^6=9x+8,$$

$$(2)\qquad x^3+y^6=9z+7,$$

$$(3)\qquad x^3+y^6=7z+5.$$

(Laisant, N. A., **1292**.)

(**78**, 524.)

301. Pour quelles valeurs de n la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est-elle un carré parfait? (Ed. Lucas, N. C., **87**.)

(*Brocard*, **77**, 119.)

***302.** Pour quelles valeurs de n la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres impairs est-elle un carré parfait? (Ed. Lucas, N. C., **88**.)

303. Pour quelles valeurs de n la somme des septièmes puissances de n premiers nombres entiers est-elle un carré parfait?

(Ed. Lucas, N. C., **89**.)

(*Brocard*, **78**, 167.)

304. Résoudre, en nombres entiers,

1° $$x^5 + 17 = y^2,$$

2° $$x^6 + 17 = y^2.$$

(E. Lemière, N. C., **228**.)

305. L'équation

$$2^{2k} + x^2 + 1 = y^3,$$

est impossible en nombres entiers (¹).

(Proth, N. C., **328**, **386**.)

306. Le quotient

$$\frac{1^5 - 3^5 + 5^5 - 7^5 \ldots - (4x-1)^5}{1 - 3 + 5 - 7 \ldots - (4x-1)}.$$

est toujours un carré parfait, mais n'est jamais un bicarré.

(Ed. Lucas, N. C., **468**.)

(*Radicke*, **79**, 213; *Cesàro*, **80**, 467.)

Autres équations indéterminées.

307. Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes (²). (Catalan, N. A., **48**.)

(¹) Dans sa lettre, M. Proth ajoute : « Ce théorème généralise, je crois, un théorème démontré par M. Gerono (*Nouvelles Annales*, juillet 1877). »

Note de Catalan.

(²) La même proposition a été énoncée par Catalan dans le t. XXVII, 1844, du *Journal de Crelle* (p. 192). (A ce propos, nous croyons que cette communication a été la seule de Catalan à ce Journal.) C'est, disait-il,

308. 8 et 9 sont-ils les seuls entiers consécutifs qui soient des puissances de nombres entiers? (¹). (LIONNET, N. A., **884**.)

309. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des sommes de la suite des nombres naturels de 0 à n, on aura, si m est impair et plus grand que 1,

$$S_m = n^2(n+1)^2\varphi[n(n+1)] = u^2\varphi(u),$$

en posant $n(n+1) = u$, et φ désignant une fonction entière.

(JACOBI, N. A., **196**.)

(*Prouhet*, **51**, 198.)

310. Le produit de plusieurs nombres consécutifs ne peut être une puissance parfaite lorsqu'un de ces nombres est premier absolu. (MATHIEU, N. A., **441**.)

(*Moreau*, **72**, 172.)

311. Trouver n nombres entiers et positifs, dont la somme égale le produit. (N. A., **611**.)

(*Housel*, **62**, 67.)

312. Tout cube parfait, augmenté de 3, 4 ou 5 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait.

(J. JOFFROY, N. A., **902**.)

[*Laisant*, **69**, 315 (²).]

« un Théorème que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer complètement; d'autres seront peut-être plus heureux :

» Deux nombres consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes; autrement dit, l'équation $x^m - y^n = 1$, dans laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admet qu'une seule solution. »

(¹) On remarquera l'identité de cet énoncé avec le précédent, sauf la rédaction. Nous croyons que la question n'a jamais été résolue. Lionnet avait une tendance à croire que la question, telle qu'il la pose, doit être résolue par la négative.

(²) Généralisation.

313. Un cube parfait, augmenté de 7 unités d'un ordre quelconque, ne peut pas être un carré parfait.

(J. JOFFROY, N. A., **942**.)

[*Morel, Moret-Blanc,* **71**, 95, 288 (¹).]

314. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, l'expression

$$\frac{(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{m-1}$$

n'est pas la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier, et le nombre

$$\frac{m(a^2+a)[(a+1)^{m-1}-a^{m-1}]}{(m-1)[(a+1)^m-a^m]}$$

n'est pas entier. (REALIS, N. A., **1001**.)

(*Callandreau,* **73**, 450.)

315. Tout cube parfait différent de zéro, augmenté de 1, 2 ou 8 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait.

(MORET-BLANC, N. A., **1008**.)

316. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^y = y^x + 1. \quad \text{(N. A., 1175.)}$$

(*Moret-Blanc,* **76**, 44.)

317. Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(x+1)^y = x^{y+1} + 1. \quad \text{(N. A., 1196.)}$$

(*Meyl,* **76**, 545.)

318. L'équation

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} + (2-\sqrt{3})^{2x+1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2y+1} - (1-\sqrt{2})^{2y+1}\right]$$

(¹) La solution de M. Morel donne prise à la critique, et la question n'est pas épuisée.

n'admet pas d'autre solution, en nombres entiers, que celle qui correspond aux valeurs $x = y = 0$.

(De Jonquières, N. A., **1281**.)

(*Fauquembergue*, **83**, 372.)

319. Pour quelles valeurs de x l'expression

$$1.2.3.4\ldots x+1$$

est-elle un carré parfait?

[Brocard, N. A., **1532**; N. C., **166**; M., **597** (1).]

320. La somme des mêmes puissances paires de trois nombres consécutifs n'est aucune puissance de même degré (2).

(Gelin, N. C., **247**.)

(*Ed. Lucas*, **77**, 248, 388.)

321. La somme des mêmes puissances paires de neuf nombres consécutifs n'est puissance d'aucun nombre.

(Gelin, N. C., **248**.)

(*Ed. Lucas*, **77**, 248, 388.)

322. L'équation

$$x^{2n+1} + x + 2n + 1 = y^2$$

est impossible en nombres entiers. (Proth, N. C., **299**.)

[*Ed. Lucas*, **78**, 122, 224 (3).]

---

(1) D'après l'énoncé inséré dans *Mathesis*, les seules solutions seraient

$$x = 4, 5, 7.$$

(2) Autrement dit, l'équation

$$(x-1)^{2n} + x^{2n} + (x+1)^{2n} = y^{2n}$$

est impossible en nombres entiers. (*Note de Catalan.*)

(3) L'énoncé est inexact. D'après une rectification, il faudrait lire ainsi l'équation

$$x^{2n+1} + x + 2x + 1 = x^{2n+1} + 3x + 1 = y^2$$

En somme, la question n'a pas été résolue.

323. Déterminer n de manière que $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n$ soit un carré. (De Rocquigny, M., **864**.)

(*Fauquembergue*, **94**, 169.)

324. Toute puissance n^x d'un nombre entier est toujours égale à la somme de n termes consécutifs, pris dans la suite naturelle des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Application au cas où $x = 3$ et où n reçoit successivement les valeurs 1, 2, 3, ... [1].

(De Montferrier, J. M., **40**.)

(*Vautré*, **77**, 253.)

325. p étant un nombre premier impair et P un polynome entier, à coefficients entiers, l'équation

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2$$

n'est vérifiée que par

$$p = 7, \qquad P = x^2 + xy + y^2.$$

(Catalan, J. S., **80**.)

PROPRIÉTÉS DE NOMBRES PARTICULIERS.

Nombres triangulaires.

326. Zéro, un, six sont-ils les seuls nombres triangulaires dont les carrés soient triangulaires? (Lionnet, N. A., **1406**.)

327. 1° a étant un nombre entier positif, il y a, entre les carrés des entiers consécutifs a et $a+1$, au moins un triangulaire et deux au plus.

2° Le nombre des carrés compris entre deux triangulaires consécutifs est nul ou égal à l'unité.

---

[1] Ce théorème a été donné par M. E. Lemoine (N. A., **70**, 368).

3° a étant un entier positif, si le nombre des triangulaires compris entre $(a+1)^2$ et $(a+2)^2$ est égal à deux, le nombre des triangulaires compris entre a^2 et $(a+1)^2$, ainsi que celui des triangulaires compris entre $(a+1)^2$ et $(a+2)^2$, égalera l'unité. Voici un premier exemple de la vérification de ces énoncés :

$$1^2,\ 3,\ 2^2,\ 6,\ 3^2,\ 10,\ 15,\ 4^2,\ 21,\ 5^2,\ 28,\ 6^2.$$

(LIONNET, N. A., **1470**.)

(*Cesàro*, **86**, 209.)

328. Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés. (PH. BRETON, N. C., **233**.)

(*S. Realis*, **77**, 194; **78**, 167; **79**, 285.)

329. Étant donnée la suite des nombres triangulaires

$$(1) \qquad 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots,$$

on forme la somme des carrés des $(n+1)$ nombres entiers consécutifs, commençant par le $2n^{\text{ième}}$ terme de la suite (1) et celle des carrés des n nombres suivants; démontrer que ces deux sommes sont égales entre elles et divisibles par la somme des n premiers carrés.

Par exemple

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=(1^2+2^2).73,$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2=(1^2+2^2+3^2).145.$$

(NEUBERG, N. C., **526**.)

(*Cesàro*, **80**, 232.)

330. Si le quart de n^5-1 est un nombre entier, décomposable en une somme de deux triangulaires, de rangs p et q, l'un au moins des nombres $2p+1$ et $2q+1$ est composé, sauf si $n=5$.

(CESÀRO, M., **503**.)

(*Fauquembergue*, **88**, 75.)

331. Soient $u, v, w, \ldots$ les facteurs *premiers* de n, supérieurs

à 2. Le nombre des *nombres triangulaires,* premiers avec n, inférieurs à $2n(n+1)$, est

$$n\left(1-\frac{2}{u}\right)\left(1-\frac{2}{v}\right)\left(1-\frac{2}{w}\right)\cdots$$

ou bien le double de ce nombre, suivant que n est *pair* ou *impair*. (CESÀRO, M., 532.)

(*Emmerich,* **91**, 95.)

332. Soit T_n le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, c'est-à-dire

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démontrer que le produit

$$(T_n + T_{n+1})(T_p + T_{p+2})$$

est la somme de trois nombres triangulaires.

(DE ROCQUIGNY, M., 868.)

(*Mandart,* **94**, 123.)

333. Déterminer n de telle sorte que la somme des n premiers triangulaires soit aussi un nombre triangulaire.

(DE ROCQUIGNY, M., 869.)

(*C. Spino,* **94**, 171.)

334. Soit $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire; on peut admettre des valeurs entières négatives de n, car $T_n = T_{n-1}$.

Démontrer que si $a+b+c=0$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, le produit

$$(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma)$$

est une somme de trois nombres triangulaires.

(DE ROCQUIGNY, M., 915.)

(*François,* **94**, 211.)

335. Mettre l'expression

$$n^2 + (2n-1)^2 + (2n+1)^2$$

sous la forme d'une somme de deux nombres triangulaires.

(De Rocquigny, M., 916.)

(*Brocard*, **95**, 23.)

336. 1° Le nombre $4n^4$ est la somme de quatre triangulaires; 2° les nombres

$$6n^4,\quad 6n^4+1,\quad 6n^4+2n^2+1,\quad 6n^4-4n^2+1,\quad 6n^4+6n^2+1$$

sont, chacun, la somme de trois triangulaires.

(De Rocquigny, M., 933.)

337. La somme de $2m+1$ nombres triangulaires consécutifs est égale à $2m+1$ fois le terme du milieu, plus la somme des carrés des m premiers nombres entiers.

(De Rocquigny, M., 936.)

338. 1° Assigner une suite régulière de n nombres triangulaires, dont la somme soit exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n(n+1)}{3.4}\left[(2n+1)m^2+(4n-1)m+2(n-1)\right]$$

pour toute valeur entière de m.

Note. — On a, en particulier, pour $m=0$, le résultat bien connu

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2.3} = 0 + \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2}.$$

On a de même, pour $m=-2$, le résultat

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui rentre dans le précédent.

Pour $m=1$ on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{2.3} \\ &= \frac{1.2}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{5.6}{2} + \frac{7.8}{2} + \ldots + \frac{(2n-1).2n}{2}, \end{aligned}$$

résultat facile à vérifier.

2° Même question pour une suite de n nombres triangulaires, dont la somme soit

$$S_n = \frac{n}{3.4}[(2n^2+9n+13)m^2+(4n^2+9n-1)m+2(n^2-1)].$$

Note. — On a, en particulier, pour $m=1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{2.3}$$
$$= \frac{2.3}{2}+\frac{4.5}{2}+\frac{6.7}{2}+\frac{8.9}{2}+\ldots+\frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Ajoutant, à cette valeur de S_n, celle qui correspond à $m=1$ dans la question 1°, on trouve

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\ldots+\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{2.3},$$

ce qui s'accorde avec le résultat relatif à $m=2$, dans la même question 1°.

3° Même question, la somme de n nombres triangulaires étant exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2-1)(m^2+m)+n^2-1].$$

Note. — On a, pour $m=1$,

$$S_n = \frac{4(3n^2-1)}{2} = \frac{1.2}{2}+\frac{4.5}{2}+\frac{7.8}{2}+\frac{10.11}{2}+\ldots$$
$$+\frac{(3n+2)(3n-1)}{2}.$$

4° Même question, la somme proposée étant

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2-1)m^2+(4n^2+6n-1)m+n^2+3n+2].$$

Note. — On a, pour $m=1$,

$$S_n = \frac{3n^2(n+1)}{2} = \frac{2.3}{2}+\frac{5.6}{2}+\frac{8.9}{2}+\frac{11.12}{2}+\ldots+\frac{3(n-1).3n}{2}.$$

5° Même question pour la somme

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2+12n+11)m^2+(4n^2+6n-1)m+n-1].$$

Note. — On a, pour $m=1$,

$$S_n = \frac{3n(n+1)^2}{2} = \frac{3.4}{2}+\frac{6.7}{2}+\frac{9.10}{2}+\frac{12.13}{2}+\ldots+\frac{3n(3n+1)}{2}.$$

Ajoutant ensemble les valeurs que prend S_n, pour $m=1$, dans les questions 3°, 4°, 5°, on obtient

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\ldots+\frac{3n(3n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(9n^2+9n+2)}{2}=\frac{3n(3n+1)(3n+2)}{2.3},$$

ainsi que cela doit être. (S. Realis, J. S., **192**.)

(**88**, 94.)

Triangles ou tétraèdres en nombres entiers.

339. La surface d'un triangle dont les côtés sont donnés en nombres *entiers* ne saurait être rationnelle, si, les côtés étant débarrassés du facteur commun 2, la somme des quotients est impaire. (Berton, N. A., **419**.)

(*De Virieu,* **64**, 168.)

340. Parmi les triangles rectangles, on sait qu'il en est une infinité dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers. De même, parmi tous les triangles ayant un même angle dont le cosinus est commensurable, il en est une infinité dont les côtés sont en nombres entiers.

Parmi les tétraèdres dont un des angles solides est trirectangle, il n'en est aucun dont toutes les arêtes soient mesurées

par des nombres entiers; mais il en est une infinité dont les quatre faces ont leurs aires mesurées par de tels nombres.

(TRANSON, N. A., **1119**.)

(*Moreau*, **74**, 296.)

341. Un tétraèdre, dont les six arêtes sont mesurées par des nombres entiers, ne peut pas avoir parmi ses angles solides un trièdre trirectangle; mais, sur les arêtes d'un tel trièdre, on peut, et d'une infinité de manières, prendre trois longueurs, OA, OB, OC, en nombres entiers, tels que l'aire du triangle ABC soit elle-même mesurée par un nombre entier ainsi que les trois autres faces du tétraèdre résultant OABC.

(TRANSON, N. A., **1125**.)

(*Chabanel*, **74**, 200, 340.)

342. On suppose que les côtés a, b, c d'un triangle sont multiples du rayon r du cercle inscrit, et l'on donne la somme $s = a^3 + b^3 + c^3$ de leurs cubes : trouver les valeurs de ces côtés.

Exemple :

$$S = 13824.$$ (N. A., **1493**.)

(**84**, 444.)

***343.** Trouver tous les triangles dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers et dont l'aire est égale au produit des deux, trois, quatre, ... premiers nombres premiers.

Exemples :

Côtés.	Aire.
3, 4, 5;	2×3;
5, 12, 13;	$2 \times 3 \times 5$;
20, 21, 29;	$2 \times 3 \times 5 \times 7$;
68, 75, 77;	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$;
.....	.....

(ED. LUCAS, N. C., **258**.)

344. Le seul triangle dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, et dont, en même temps, les côtés sont

exprimés par trois entiers consécutifs, est celui dont les côtés sont exprimés par les nombres 4, 5, 6. (WEILL, M., **394**.)

(*Cesàro*, **89**, 142.)

345. Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle, évalués en nombres entiers, est toujours divisible par 60.

(DUFRÉNOY, J. M., **172**.)

(*Deslais*, **80**, 261.)

Nombres de Bernoulli et d'Euler.

***346.** S_n désignant la somme des x premiers nombres, élevés à la puissance n; démontrer que, pour $x = -\frac{1}{2}$, le quotient de S_{2n} par S_n est égal à

$$(-1)^{n-1}.6.\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-2}}B_n,$$

B_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre bernoullien.

(ED. LUCAS, N. C., **137**.)

347. Déterminer directement, au moyen de la table des nombres premiers, le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Démontrer, en particulier, les propositions suivantes :

1° Si p et q sont premiers entre eux, le dénominateur de B_{pq} est divisible par le produit des dénominateurs de B_p et de B_q.

2° Si 2^p+1 est un nombre premier, ce nombre divise le dénominateur de B_p. (ED. LUCAS, N. C., **138**.)

(*Brocard*, **79**, 282; *Radicke*, **80**, 69.)

348. Quelle est la forme linéaire des diviseurs premiers des numérateurs de B_p? (ED. LUCAS, N. C., **139**.)

(*Brocard*, **79**, 284.)

*349. Si p est un nombre premier, on a les congruences

$$E_{p+1} + E_0 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$E_{p-1} + E_{p-2} + \ldots + E_0 \equiv 0 \pmod{p} \text{ (1)}.$$

(Ed. Lucas, N. C., 470.)

350. Si, dans la formule

$$(B+1)(B+2)\ldots(B+n) = \frac{1.2\ldots n}{n+1},$$

on remplace les exposants de B par des indices, et B_n par le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, on obtient une identité.

(Ed. Lucas, N. C., 471.)

(*Radicke*, **79**, 196, 333.)

351. Si

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

on a

$$S_{n,p+1} = (n+1)\,S_{n,p} - (S_{1,p} + S_{2,p} + \ldots + S_{n,p}) \text{ (2)}.$$

(J. M. Croker, N. C., 477.)

(*Cesàro*, **80**, 82.)

*352. I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2, et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q - B^q = 0,$$

---

(1) *Voir* un Mémoire de M. Catalan : *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*. — Académie Royale de Belgique, t. XXXVII des Mémoires.

(*Note de la Rédaction.*)

(2) M. G. de Longchamps, qui a trouvé, de son côté, cette relation (presque évidente, du reste), en fait la base d'une nouvelle théorie des nombres de Bernoulli (*Annales de l'École Normale*, février 1879).

(*Note de Catalan.*)

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s = B^s(B-1)^p(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p + 2^p B_p - 2B_p = 0.$$

(Ed. Lucas, M., 252.)

SÉRIES. — IDENTITÉS. — QUESTIONS DIVERSES.

Séries arithmétiques.

353. Soient une progression arithmétique de différence δ_1 et une série arithmétique d'ordre m_1, déduite de cette progression; soient une seconde progression d'arithmétique de différence δ_2, et une série arithmétique déduite et d'ordre m_2, et ainsi de suite jusqu'à la série d'ordre m_n.

Si l'on multiplie ensemble les premiers termes de ces séries, de même les seconds termes, etc., on obtient une série arithmétique d'ordre $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, déduite d'une progression arithmétique à différence

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!}\, \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n.$$

(Bŏklen, N. A., 615.)

(*De Virieu*, **70**, 231.)

354. u_n désignant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Lamé, on a

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0$$

pourvu que l'on remplace les exposants par des indices.

(Cesàro, N. A., **1437**.)

(*Moret-Blanc*, **84**, 533.)

355. Trouver

$$\tfrac{1}{2}\,T_n = -1^n + 3^n - 5^n + 7^n - \ldots + (4x-1)^n,$$

et faire voir que les coefficients de T_n sont entiers.

(Ed. Lucas, N. C., **212.**)

(*Brocard,* **77**, 279.)

***356.** La somme

$$-1^4 + 3^4 - 5^4 + \ldots + (4x-1)^4$$

n'est ni un carré, ni le double d'un carré, ni le triple d'un carré. (Ed. Lucas, N. C., **213.**)

357. Dans la série de Lamé

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,$$

1° Si l'on prend quatre termes consécutifs, la différence entre le produit des termes moyens et celui des termes extrêmes égale ± 1;

2° Si l'on prend cinq termes consécutifs, la différence entre la quatrième puissance du terme du milieu et le produit des quatre autres termes égale 1. (Gelin, N. C., **570.**)

(*Cesàro,* **80**, 423.)

***358.** u_n désignant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Lamé

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,$$

on a

$$(2u+1)^n - u^{3n} = 0,$$

pourvu que l'on remplace les exposants par des indices.

(Cesàro, N. C., **605.**)

359. Si l'on considère les séries

$$\begin{array}{lllllllll}
n_n : 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \\
u_n : 0, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & \ldots, \\
v_n : 2, & 1, & 3, & 4, & 7, & 11, & 18, & 29, & \ldots;
\end{array}$$

démontrer que l'on a

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \\ v_{2n} &= u_{n-1}^2 + 2u_n^2 + u_{n+1}^2, \\ v_{4n+2} &= v_{2n+1}^2 + 2, \\ v_{4n} &= (2u_n)^2 + u_n^2 + 2. \end{aligned}$$

et décomposer en carrés u_{2n} et v_{2n+1}. (Ed. Lucas, M., **582**.)

(*Molenbroek*, **89**, 234.)

360. Trouver le terme général de la série 6, 210, 7140, 242556, ..., qui renferme, dans leur ordre de grandeur croissante, tous les nombres qui sont, à la fois, triangulaires et doubles d'un triangulaire. (S. Realis, J. S., **87**.)

(*Brocard*, **93**, 117, 139.)

Identités et inégalités.

361. Soit $f(x)$ une fonction algébrique de x et soient $1, d_1, d_2, d_3, \ldots, m$, tous les diviseurs de m. Remplaçant x par tous ces diviseurs, posons

$$f(1) + f(d_1) + f(d_2) + \ldots + f(m) = F(m).$$

Soient parmi ces diviseurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ tous les nombres premiers, facteurs de m; on a l'identité

$$f(m) = F(m) - \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) + \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right) - \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right) + \ldots,$$

où

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_2}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_3}\right),$$

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_4}\right) + \ldots$$
$$+ F\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_4}\right) + \ldots$$

.....

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}\right) + \ldots.$$

La loi est en évidence. (J. Liouville, N. A., **382**.)

(*Blerzy Merry*, **57**, 434.)

362. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation $x^3 - px + q = 0$, on aura en nombres entiers

$$9q^2 + Aa^2 = r'^2,$$
$$9q^2 + Bb^2 = r''^2,$$
$$9q^2 + Cc^2 = r'''^2,$$

$\frac{A}{4p}$, $\frac{B}{4p}$, $\frac{C}{4p}$ étant racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et r, r', r'' étant de même racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles des coefficients de la proposée.

Remarque. — Les trois relations ci-dessus étant divisibles respectivement par a^2, b^2, c^2, les carrés $\frac{r'^2}{a^2}$, $\frac{r''^2}{b^2}$, $\frac{r'''^2}{c^2}$ sont encore racines d'une équation cubique qu'on peut construire.

(S. Realis, N. A., **748**.)

(*S. Realis*, **78**, 190.)

363. Le nombre a n'étant pas divisible par p, nombre premier impair, on sait que $a^{\frac{p-1}{2}} = pA \pm 1$: le reste ± 1 est représenté par $\left(\frac{a}{p}\right)$, notation de Legendre.

Cela posé, on a

$$\Sigma(ax^2 + b)^{p-1} = pB - \left[1 + \left(\frac{-ab}{p}\right)\right],$$
$$\Sigma\Sigma(ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = pC + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

a, b, c sont des entiers non divisibles par p; A, B, C sont entiers; les sommes sont prises en donnant à x et à y les valeurs 0, 1, 2, ..., $p - 1$. (Le Besgue, N. A., **758**.)

(*Pepin*, **71**, 223.)

364. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a,

l'expression

$$\frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m}$$

dans laquelle m est un entier positif, ne peut devenir la $(2m+3)^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier.

On excepte, bien entendu, les valeurs $a=0$, et $a=-1$, qui annulent l'expression considérée. (S. Realis, N. A., **1066**.)

(*Moreau*, **74**, 155.)

365. Soit q_p le quotient de la division de n par p, on a

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+\ldots+q_n^2=q_1+3q_2+5q_3+\ldots+(2n-1)q_n.$$

(Cesàro, N. A., **1401**.)

(*Chabanel*, **83**, 474.)

***366.** $f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim\frac{f(n)}{n^2}=1-\frac{n^2}{12}.$$

(Cesàro, N. A., **1442**.)

367. Démontrer les identités suivantes :

1°

$$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2=\sum_{k=0}^{k=m}2^{a-2k}\binom{a}{k}\binom{a-k}{k},$$

où $m=\varepsilon\left(\frac{a}{2}\right)$;

2°

$$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2=2\sum_{k=0}^{k=(a-1)}\binom{a}{k}\binom{a-1}{k}=2\,\frac{2a-1}{a-1}\sum_{k=1}^{k=a-1}\binom{a-1}{k}\binom{a-1}{k-1};$$

3°

$$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2=\frac{a+1}{a}\sum_{k=1}^{k=a-1}\binom{a}{k}\binom{a}{k-1};$$

4°

$$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2=(-1)^a\sum_{k=0}^{k=2a}(-1)^k\binom{2a}{k}^2;$$

5°

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2\sum_{k=0}^{k=b}\binom{b}{k}^2}{\sum_{k=0}^{k=b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}}=\sum_{k=-b}^{k=b}(-1)^k\binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k},$$

où b est un nombre entier positif $< a$. [SZILY, N. A., **1656** (¹).]

368. Si $n = \mathfrak{M}.3+1$, on a identiquement

$$C_{2n,1}-3C_{2n,3}+3^2C_{2n,3}-\pm 3^{n-1}C_{2n,1}=2^{2n-1}.$$

Par exemple, pour $n=7$,

$$\frac{14}{1}-3\frac{14.13.12}{1.2.3}+9\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5}-27\frac{14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$+81\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5}-243\frac{14.13.12}{1.2.3}+729\frac{14}{1}=2^{13}.$$

(CATALAN, N. C., **41**.)

(*Catalan*, **79**, 281.)

369. Si l'on pose

$$S_n=1^n+2^n+3^n+\ldots x^n,\qquad n^p=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p};$$

on a

$$2^{n-1}S_1^n=n_1S_{2n-1}+n_3S_{2n-3}+n_5S_{2n-5}+\ldots;$$

le nombre des termes du second membre étant $\frac{n+1}{2}$, ou $\frac{n}{2}$, selon que n est impair ou pair. (STERN.)

(¹) Dans les *N. A.*, la question a été numérotée par erreur 1648.

Exemples :

$$S_1^2 = S_3,$$

$$2S_1^4 = S_7 + S_5. \quad \text{(Jacobi, N. C., 488.)}$$

(*Radicke*, **79**, 378.)

370. Si l'on pose

$$S_p = 1^p + 2^p + 5^p + \ldots x^p, \qquad n_p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

de sorte que $n_p = 0$, si n est inférieur à p, on a

$$(m_1 + n_1)S_{m+n-1} + (m_3 + n_3)S_{m+n-3} + \ldots$$
$$= \frac{x^n(x+1)^m + x^m(x+1)^n}{2},$$

$$(m_2 - n_2)S_{m+n-2} + (m_4 - n_4)S_{m+n-3} + \ldots$$
$$= \frac{x^n(x+1)^m + x^m(x+1)^n}{2}.$$

En particulier, pour $m = n + 1$, on a

$$\frac{2n+1}{1} S_{2n} + \frac{2n-1}{3} n_2 S_{2n-2} + \ldots = \frac{x^n(x+1)^n(2x+1)}{2},$$

$$n_1 S_{2n-1} + n_3 S_{2n-3} + \ldots = \frac{x^n(x+1)^n}{2};$$

formules dont la seconde a déjà été donnée par M. Stern. (*Voir* N. C., **79**, 378.) (Radicke, N. C., 558.)

371. Ayant posé

$$S_{n,\alpha} = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha$$

et

$$\sigma_{\alpha,\beta} = S_{1,\alpha} + 2^\beta S_{2,\alpha} + 3^\beta S_{3,\alpha} + \ldots + n^\beta S_{n,\alpha},$$

démontrer la relation

$$\sigma_{\alpha,\beta} + \sigma_{\beta,\alpha} = S_{n,\alpha}.S_{n,\beta} - S_{n,\alpha+\beta}.$$

(Cesàro, N. C., 578.)

(*Catalan*, **80**, 474.)

372. Démontrer que, pour tout nombre entier $n > 2$, on a

$$2^{2n-n-2} - 1 = \frac{(2^n-1)(2^n-2)}{2.3} + \frac{(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^{n-1}+2)}{2.3\ldots(2^{n-1}-1)}.$$

Remarque. — On déduit de là que : tout nombre premier $2^n - 1$, plus grand que l'unité, est diviseur du nombre $2^{2^n-n-2} - 1$. Cette proposition peut aussi être démontrée (et généralisée) à l'aide du théorème de Fermat. (S. Realis, M. 77.)

(*Van den Broeck*, **84**, 238.)

373. Si x est compris entre 0 et 1, on a

$$[E(x)]^p + \left[E\left(n + \frac{1}{n}\right)\right]^p + \left[E\left(x + \frac{2}{n}\right)\right]^p + \ldots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]^p = [E(nx)]^p,$$

$E(t)$ désignant le plus grand entier contenu dans t.

(Catalan, M., 343.)

(*Van den Broeck*, **85**, 65.)

374. Si $n = \mathfrak{M}3 + 1$, on a identiquement

$$C_{2n,1} - 3C_{2n,3} + 3^2 C_{2n,5} - \ldots \pm 3^{n-1} C_{2n,1} = 2^{2n-1}.$$

(Catalan, M., 368.)

(*Cesàro*, **85**, 118.)

375. Démontrer la formule

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \frac{q^7}{1-q^7} - \frac{q^8}{1-q^8} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} + \ldots = q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \ldots.$$

Dans le premier membre la fraction $\frac{q^2}{1-q^2}$ est prise avec le

signe + ou avec le signe — selon que a est le produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers. Il y a exception pour le premier terme. (BASCHWITZ, M., **826**.)

(*Cesàro*, **93**, 205.)

376. A et B étant deux nombres positifs quelconques et m un nombre entier positif, démontrer que l'on a toujours

$$(A+B)^m < 2^{m-1}(A^m+B^m). \quad (M., \mathbf{853}.)$$

(*Droz-Farny*, **93**, 210.)

377. Soit S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers. Démontrer que

$$S_5 = \frac{4}{3} S_1^2 (S_1 - 1) + S_3. \quad (M., \mathbf{908}.)$$

(*Brocard*, **94**, 209.)

Questions diverses.

378. Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a, b, c, d, tels que les dix nombres

$$\begin{array}{lll} a+b-1, & a+c-1, & a+d-1, \\ b+c-1, & b+d-1, & c+d-1, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2-b-c-d, & 2-c-d-a, \\ 2-d-a-b, & 2-a-b-c \end{array}$$

soient les inverses de nombres entiers.

(LEVAVASSEUR, N. A., **1652**.)

***379.** Si l'on pose

$$(x^2+ay^2)^n = X^2 + aY^2,$$

le hessien de la fonction

$$X + aY$$

est aussi de la forme $x^2 + ay^2$. Que peut-on en conclure dans le cas particulier de $n = 3^2$? (ED. LUCAS, N. C., **136**.)

380. Dans quel cas la racine carrée de

$$A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$$

a-t-elle la forme

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c};$$

A, B, C, D, a, b, c étant des nombres commensurables?
(N. C., **330**.)

381. Si S_n est égal à la somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres naturels qui le précèdent, on a

$$S_{2^k - 1} = S_{2^k}. \quad \text{(PROTH, N. C., 388.)}$$

(*Cesàro*, **80**, 77.)

382. Si le nombre n est décomposé en parties appartenant aux progressions

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & \ldots, & a, & \ldots, \\ 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2b, & \ldots, \\ 3, & 6, & 9, & \ldots, & 3c, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

la somme des fractions

$$\frac{1}{1.2.3\ldots a \times 2.4.6\ldots 2b \times 3.6.9\ldots 3c \times \ldots}$$

égale l'unité. (CATALAN, N. C., **448**.)

(**79**, 326.)

383. Si le nombre n est décomposé en parties appartenant aux progressions

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & \ldots, & a, & \ldots, \\ 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2b, & \ldots, \\ 3, & 6, & 9, & \ldots, & 3c, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

la somme des fractions

$$\frac{(\int 2)^b \times (\int 3)^c \times \ldots}{1.2.3\ldots a \times 2.4.6\ldots 2b \times 3.6.9\ldots 3c \times \ldots}$$

égale le nombre des décompositions [1].

(CATALAN, N. C., 465.)

384. Si, après avoir rangé dans leur ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre entier donné, on prend à volonté dans la suite ainsi formée trois fonctions consécutives

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{A}{B},$$

on a

$$\frac{a}{b} = \frac{A+\alpha}{B+\beta}.$$

Ainsi, par exemple, si le dénominateur est inférieur à 8, on trouve les fractions suivantes plus petites que l'unité et vérifiant le théorème

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

(J. FAREY, M., 22.)

(*Pullich*, 81, 161.)

385. Soient A_m la moyenne arithmétique des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres non supérieurs et premiers à N; B_m la moyenne arithmétique des produits m à m des mêmes nombres. Démontrer les relations symboliques

$$A^m = (N - A)^m, \qquad B^m = (N - B)^m.$$

(CESÀRO, M., 67.)

(*Cesàro*, 85, 81.)

---

[1] Voir la question précédente.

386. Soient

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \theta = n,$$

$$N = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\theta}.$$

Si deux, au moins, des nombres α, β, ..., θ sont impairs, N est pair.

Corollaire. — Si m est pair et que p soit impair,

$$C_{m,p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}$$

est pair. (CATALAN, M., **79**.)

(*Clevers*, **82**, 67.)

387. Les nombres combinatoires

$$C_{m,1},\quad C_{m,2},\quad C_{m,3},\quad \ldots,\quad C_{m,m}$$

sont tous impairs, si $m = 2^k - 1$. Cette condition est nécessaire.

Exemples :

$m = 3 = 2^2 - 1$: 3, 3, 1;
$m = 5$: 5, 10, 10, 5, 1;
$m = 7 = 2^3 - 1$: 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1;
$m = 9$: 9, 36, 84, ...;
$m = 15 = 2^4 - 1$: 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, ...

(CATALAN, M., **80**.)

(*Clevers*, **82**, 68.)

388. Étant donnée une fraction ordinaire irréductible $\frac{a}{b}$, de dénominateur égal ou inférieur à n, trouver la fraction irréductible immédiatement supérieure, aussi de dénominateur égal ou inférieur à n. (STOUVENEL, M., **91**.)

(*Neuberg*, **85**, 12, 56, 76.)

389. Soient, dans la suite des nombres impairs, S_α la somme

des α premiers termes; S_β celle des β termes suivants; S_γ celle des γ termes qui suivent les $\alpha + \beta$ premiers; déterminer α, β, γ, de manière que

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$

(De Rocquigny, M., **344**.)

(*Van den Broeck, Cesàro,* **85**, 20, 228.)

CALCUL DES PROBABILITÉS.

Tirages au sort et jeux.

1. On a mis dans une urne 20 billets numérotés 1, 2, ..., 20. Sur ce nombre, il y a 5 bons billets et 15 mauvais; 20 personnes doivent puiser successivement dans l'urne et prendre un des billets. La chance de prendre un bon billet est-elle la même pour toutes ces personnes? (FODOT, N. A., 84.)

(*Faure*, **52**, 99.)

2. On a un jeu complet de 52 cartes; on les jette successivement sur une table, en les retournant et prononçant à mesure 1, 2, 3, ..., 13 et recommençant. Quelle est la probabilité de rencontrer juste? L'*as* compte pour 1, le *valet* pour 11, la *dame* pour 12, et le *roi* pour 13. (FODOT, N. A., 85.)

(*Coupy*, **44**, 404.)

3. On a n urnes renfermant chacune les m premiers numéros. On tire un numéro de chaque urne; quelle est la probabilité que la somme des nombres sortis 1° soit égale à un nombre donné, 2° soit comprise entre deux nombres donnés? (N. A., 444.)

(*Moreau*, **72**, 131.)

4. Pierre tire quatre cartes d'un jeu de piquet; il donne les trois premières à Paul et garde la quatrième pour lui. Pierre a gagné si sa carte n'est de la couleur d'aucune des cartes de Paul, ou si, étant de la couleur de l'une ou de plusieurs d'entre elles,

elle a une valeur supérieure. La mise de Paul étant de 1fr, quelle doit être celle de Pierre pour que le jeu soit équitable?

(ROUCHÉ, N. A., **1597**.)

5. On tire, séparément, les nombres p et q, au hasard, parmi les entiers compris de $-n$ à $+n$, inclusivement.

Quelle est la probabilité que l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

aura ses racines réelles?

Même question, les nombres p et q étant tirés, au hasard, parmi les entiers positifs, de 1 à n, inclusivement.

(LAISANT, N. C., **457**.)

(*Radicke*, **80**, 212.)

6. Les N premiers nombres entiers sont renfermés dans une urne; on tire au hasard deux nombres x et y. La probabilité que la somme $x + y$ soit un nombre premier avec N est

$$\varphi(N) : (N - 1)$$

ou $\varphi(n) : N$, suivant que N est pair ou impair.

(DE ROCQUIGNY, M., **242**.)

(*Laisant*, **88**, 253.)

7. A un certain jeu, le joueur A gagne un point chaque fois qu'il tire une boule blanche d'une urne qui contient 3 boules blanches et 2 boules noires; il perd tous ses points et donne un point à B, chaque fois qu'il tire une boule noire; B d'ailleurs ne fait jamais de tirage. Quelle est la probabilité pour A de faire 3 points? (PEIRCE, M., **243**.)

(*Mansion*, **89**, 97.)

8. Les n premiers nombres sont dans une urne. On en tire au hasard trois. Quelle est la probabilité que l'un des nombres extraits est égal à la somme des deux autres ou égal à leur demi-somme. (DE ROCQUIGNY, M., **637**.)

(*Bellens*, **90**, 43.)

Questions arithmétiques ou algébriques.

9. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ des valeurs positives de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation, à coefficients positifs,

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots + A_n x_n = 1.$$

La probabilité que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ soient respectivement supérieurs à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est exprimée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de

$$1 - (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + \ldots + A_n \alpha_n),$$

pourvu que cette quantité soit positive; si elle est négative, la probabilité est nulle. (Cesàro, N. A., **1447**; N. C., **543**.)

10. Ayant pris, au hasard, un chiffre d'une puissance quelconque de 5, il y a avantage à parier que c'est un 5 ou un 0. (Cesàro, N. A., **1485**.)

11. Une solution en nombres entiers de l'équation

$$x + y + z = n$$

est prise au hasard, aucune des racines n'étant zéro; chercher la probabilité que le produit des valeurs de x, y, z soit multiple de $\frac{n}{k}$, k étant un diviseur de l'entier n. (N. A., **1647**.)

12. Deux permutations des n premiers nombres sont dites inverses l'une de l'autre lorsqu'elles présentent les mêmes éléments en ordre exactement inverse; elles sont dites symétriques l'une de l'autre lorsque la somme des éléments qui y occupent la même place est constamment égale à $n+1$. Démontrer que la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard parmi les permutations des n premiers nombres soit telle que son in-

verse et sa symétrique coïncident est donnée par la formule

$$p = \frac{1}{135\ldots i}$$

i étant le plus grand entier impair non supérieur à n.

(D. André, N. A., **1651**.)

(*Audibert*, **94***, 16.)

13. Étant donnés deux nombres quelconques, il y a environ 61 à parier contre 39, qu'ils sont premiers entre eux.

(Cesàro, M., **75**.)

(*Cesàro*, **83**, 224, 248; **84**, 150.)

14. Si a et b sont deux nombres entiers donnés, premiers entre eux, et n un nombre entier variable, la probabilité que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = n$$

est égal à $E\left(\frac{n}{ab}\right)$, est représentée par

$$P_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right);$$

celle dont le nombre de ces solutions est $E\left(\frac{n}{ab}\right) + 1$ s'exprime par

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}.$$

(Cesàro, M., **196**.)

(*Neuberg*, **89**, 116.)

15. Ayant pris, au hasard, quatre nombres entiers, il y a à parier $90\pi^{-4}$ contre $1 - 90\pi^{-4}$ (environ 12 contre 1) qu'ils sont premiers entre eux. (Cesàro, M., **316**.)

(*Cesàro*, **84**, 150.)

16. On décompose, au hasard, le nombre donné $2a$ en deux parties positives x, y. Quelle est la probabilité que la somme $m^2x^2 + n^2y^2$ soit comprise entre p^2a^2 et q^2a^2, m, n, p, q étant des nombres donnés? (M., **655**.)

(*Kluyver*, **91**, 117.)

Questions géométriques.

17. Quelle est la probabilité que l'angle aigu formé par deux grands cercles, tracés au hasard sur une sphère, sera compris entre m degrés et n degrés? (N. A., 567.)

(*E. Martin*, **61**, 319.)

18. La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite. (Cesàro, N. A., 1486.)

19. On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole. (Cesàro, N. A., 1511.)

20. On donne n tiges dont les longueurs sont représentées par $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$. Chacune de ces tiges est peinte en rouge à l'une de ses extrémités, en noir à l'autre. On casse, au hasard, un morceau de chacune de ces tiges. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ les longueurs des bouts qui portent la marque noire; quelle est la probabilité d'avoir

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S,$$

S étant plus petit que $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$?

(Ed. Dewulf, N. A., 1519.)

21. Les côtés d'une ligne polygonale AB ... KL sont déterminés, chacun, avec une approximation connue; chaque valeur étant comprise dans des limites assignées, et toutes étant également probables : les directions des côtés sont invariables. Les sommets de cette ligne brisée sont susceptibles d'occuper une infinité de positions.

Cela étant, on propose de déterminer :

1° Les limites dans lesquelles peut varier la position de l'un quelconque des sommets.

2° La probabilité relative de chacune de ces positions.

Réponse. — Chaque sommet est variable dans un polygone à centre, de $2m$ côtés; m étant le nombre des éléments du cheminement polygonal qui précède le sommet considéré; et lesdits côtés étant égaux, respectivement aux variations possibles de ces éléments, et parallèles à leurs directions. Si l'on élève, en chaque point de l'aire de ce polygone, une ordonnée proportionnelle à la probabilité de ce point, on obtiendra une surface que l'on peut appeler *surface de probabilité,* dont la connaissance répondrait à tout. Or, cette surface résulte de la combinaison, par voie d'addition ou de soustraction, des ordonnées de surfaces cylindriques à génératrices parallèles au plan du polygone, et ayant pour directrices les paraboles représentées $y = Kx^{m-2}$, le coefficient K ayant une valeur particulière pour chaque direction. Cette surface de probabilité est discontinue; ses arêtes se projettent sur le polygone qui lui sert de base, suivant $m2^{(m-1)}$ lignes droites, égales et parallèles par groupes de 2^{m-1}; les côtés du polygone de base étant d'ailleurs compris dans ces lignes. (PEAUCELLIER, N. C., 128.)

22. On donne une droite AB, de longueur l; on prend, au hasard, un point C entre A et B, puis, au hasard, un point D entre C et B.

Quelle est la probabilité que deux des longueurs AC, CD, DB soient plus petites qu'une longueur donnée a?

(E. LEMOINE, N. C., 370.)

(*Cesàro,* **80**, 74.)

23. On casse, au hasard, en trois morceaux, une barre de longueur l. Quelle est la probabilité que deux de ces trois morceaux soient plus petits qu'une longueur donnée a?

(E. LEMOINE, N. C., 371.)

(*Cesàro,* **80**, 74.)

24. Un arbre qui croît verticalement sur le flanc d'une montagne d'une inclinaison inconnue est brisé par le vent, mais non coupé en deux. Démontrer que la probabilité que la cime atteigne le sol est $\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}$. (ARTEMAS MARTIN, M., 233.)

(*Cesàro,* **86**, 14.)

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Damiers et échiquiers; jeux de dominos.

1. Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence de leurs rangs dans la ligne. Combien existe-t-il de dispositions de ce genre?

1 7 5 8 2 4 6 3

est une de ces dispositions.

Placer sur un échiquier huit *reines,* de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres? La solution est une conséquence de la précédente. (LIONNET, N. A., **251**.)

(*Bourget,* **81**, 473.) (1)

2. En ôtant les doubles du jeu ordinaire de *dominos,* il reste vingt et une pièces. On peut ranger ces vingt et une pièces sur une seule ligne en se conformant à la règle connue du jeu. De combien de manières cet arrangement est-il possible (2)?

(N. A., **252**.)

(**72**, 93; N. C., **78**, 45.) (3)

---

(1) *Voir* aussi une Note de Catalan, **64**, 187.

(2) Question combinatoire difficile que nous avons vainement proposée à plusieurs analystes distingués. *Note de la Rédaction.*

(3) La question a été complètement résolue, d'abord par le Dr Reiss, au prix d'un énorme travail et avec d'interminables calculs; et plus tard, par M. G. Tarry, par une méthode simple et d'une rare élégance. Sur ce problème. qui a une certaine celébrité, on consultera avec grand avantage les *Récréations mathématiques* d'Édouard Lucas.

3. 1° Écrire les n premiers nombres entiers $1, 2, 3, \ldots, n$, sur une même ligne, de telle sorte que la différence entre deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à celle de leurs rangs sur cette ligne;

2° Combien le problème admet-il de solutions?

Sur un échiquier composé de n^2 cases, placer n reines, de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise par l'une des $(n-1)$ autres, est la même question posée en d'autres termes [1].

(LIONNET, N. A., 963.)

4. 1° Sur l'échiquier de n^2 cases, le nombre des sauts du cavalier des échecs est égal au double de $(2n-3)^2-1$;

2° Trouver le nombre des sauts du cavalier sur un rectangle de pq cases? (ED. LUCAS, M., 230.)

(*Neuberg*, **85**, 35.)

5. De combien de manières un pion du jeu de dames, placé en un coin du damier, peut-il se rendre sur le bord opposé en progressant par cases consécutives parallèlement à l'une ou à l'autre diagonale?

Suivant que le damier a $2n$ ou $2n+1$ cases de ce côté, le nombre cherché est égal à $C_{2n-1,n-1}$ ou $C_{2n.n}$.

(ED. LUCAS, M., 783.)

6. Sur les centres des n^2 cases d'un damier, on place n jetons de telle façon que deux quelconques d'entre eux ne soient pas situés sur une même ligne parallèle à l'un ou l'autre des bords du damier. Démontrer que le nombre t_n des dispositions distinctes est égal à $1.2\ldots n$, et que les jetons sont toujours en nombre pair sur les cases de couleur contraire à celle du coin inférieur de gauche.

On suppose de plus que les jetons ne sont pas situés sur les cases d'une diagonale. Démontrer que, si l'on désigne par θ_n le

---

[1] Cet énoncé est une généralisation de la question 1 ci-dessus.

nombre des dispositions distinctes, on a

$$\theta_{n+1} = n(\theta_n + \theta_{n-1}),$$
$$\theta_{n+1} = (n+1)\theta_{n-1}.$$

Démontrer que le rapport de t_n à θ_n a pour limite la base du système des logarithmes népériens, lorsque n augmente indéfiniment.

En supposant de plus que les jetons ne soient pas situés sur les cases des deux diagonales, calculer le nombre T_n des dispositions et la limite de t_n à T_n lorsque n augmente indéfiniment.

Démontrer que le nombre maximum des jetons que l'on peut placer sur les cases, de telle sorte que deux jetons ne soient pas situés sur une parallèle à l'une ou l'autre des diagonales, est $2^n - 2$ et que le nombre des dispositions distinctes de ces $2^n - 2$ jetons est 2^n. (Ed. Lucas, J. S., 62.)

7. On place n jetons sur les cases d'un échiquier carré de n^2 cases, de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul jeton dans chacune des colonnes ou des lignes de l'échiquier. Démontrer que, si l'on désigne par S_n le nombre des solutions symétriques par rapport au centre de l'échiquier, on a

$$S_{2n+1} = S_{2n} = 2.4.6\ldots(2n).$$

Si l'on désigne par u_n le nombre des solutions symétriques par rapport à l'une des diagonales, on a

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2};$$

et aussi

$$u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6} + \ldots.$$

Traiter la même question pour les solutions symétriques par rapport aux diagonales. (Ed. Lucas, J. S., 71.)

8. On sait que le roi, aux échecs, ne peut se déplacer à chaque coup qu'en occupant l'une des huit cases voisines qui l'entourent; cela posé, démontrer que les nombres des trajets différents que le roi peut effectuer sur un échiquier indéfini, pour se rendre d'une case donnée à une autre case donnée par le nombre minimum de coups, sont respectivement égaux aux coefficients du développement des puissances successives du trinôme

$$x^2 + x + 1.$$

(Ed. Lucas, J. S., **179**.)

(*Chapron*, **89**, 214.)

Carrés magiques et figures analogues.

9. Donner toutes les solutions du problème suivant :

Disposer également les neuf premiers nombres 1, 2, 3, ..., 9 sur les côtés d'un triangle équilatéral, comme l'indique cette figure

o
o o
o o
o o o o

de façon que les trois sommes des quatre nombres placés sur chaque côté soient égales entre elles, ainsi que les trois sommes de leurs carrés. (Proth, N. A., **1323**.)

(*Lionnet*, **79**, 525; *Romero*, **82**, 46.)

10. 1° Méthode pour ranger un carré quelconque en carré magique.

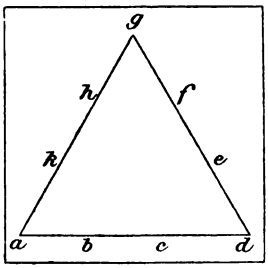
2° Question du carré 22^2, qui reste planétaire si l'on enlève trois enceintes, puis encore deux à la même condition (*sic*), puis encore une seule à la même condition.

3° Nombre de solutions qui peuvent arriver à chaque carré [1].

(FERMAT, N, C., 65.)

(**76**, 55) [2].

11. Disposer, en triangle équilatéral, les neuf premiers chif-



fres, a, b, c, d, e, f, g, h, k; de manière que

$$a+b+c+d=d+e+f+g=g+h+k+a,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2=d^2+e^2+f^2+g^2=g^2+h^2+k^2+a^2 \text{ [3]}.$$

(PROTH, N. C., 359.)

(*Cesàro*, **78**, 293, 395; **80**, 317, 415.)

12. Faire un carré magique avec un jeu de dominos dont les doubles (0, 0), (1, 1), ..., (6, 6) sont remplacés par des simples : 0, 1, ..., 6. (M., **190**.)

(**86**, 43.)

13. Neuf nombres entiers consécutifs sont disposés en carré

---

(1) Cet énoncé, très obscur, m'est communiqué par M. de Tilly, qui l'a copié exactement. J'ignore si, en effet, le problème a été proposé par Fermat. Euler, et beaucoup d'autres géomètres, se sont occupés des carrés magiques, sur lequels Frénicle a composé un traité complet.

(*Note de Catalan.*)

(2) Ce n'est pas une solution à proprement parler, mais plutôt une simple note.

(3) A rapprocher de la question 9 ci-dessus.

de la manière suivante

$$\begin{vmatrix} n-4 & n+2 & n-2 \\ n-1 & n & n+4 \\ n+3 & n-3 & n+1 \end{vmatrix}.$$

Le centre est occupé par le nombre du milieu; les autres nombres se succèdent, d'après la loi du cavalier, dans l'ordre de grandeur croissante.

Choisir n de manière que la valeur de ce *déterminant du cavalier* soit un carré parfait. (De Rocquigny, M., **646**.)

(*Brocard*, **89**, 257.)

Autres questions.

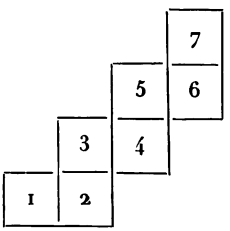
14. Soit un carré divisé par des lignes horizontales et verticales en n^2 petits carrés, ayant chacun deux unités de longueur pour côté. Prenons deux côtés adjacents du grand carré pour axes coordonnés. Les coordonnées du centre d'un petit carré sont exprimées par des nombres entiers impairs, et les coordonnées des sommets par des nombres pairs; désignons par (h, v) le centre d'un petit carré ayant h pour abscisse horizontale et v pour ordonnée verticale; faisant passer une droite par (h, v) et (h', v'), quels sont les carrés que cette droite traversera, et quels sont les centres et les sommets des carrés situés sur cette droite? Étant données les équations de deux droites passant chacune par deux centres, quelles relations doivent exister entre les coordonnées des quatre centres; 1° pour que les deux droites soient parallèles; 2° pour qu'elles se coupent à angle droit; 3° pour que le point d'intersection soit le centre d'un cinquième carré? (N. A., **51**.)

(*Moret-Blanc*, **94**, 28*.)

15. Soient trois axes rectangulaires; on les divise, à partir de l'origine, chacun en parties égales à l'unité; par les points de division d'un axe on mène respectivement des plans parallèles

au plan des deux autres axes; ces trois systèmes de plans parallèles déterminent, par leurs intersections, tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers. Soit un point d'intersection ayant pour coordonnées les nombres entiers m, n, p; ce point est le sommet d'un parallélépipède. Prenons, dans l'intérieur de ce parallélépipède, trois points ayant pour coordonnées entières respectives m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3. Le plan qui passe par ces trois points partage le parallélépipède en deux portions; combien chaque portion renferme-t-elle de nombres entiers? (N. A., **266**.)

16. Soient sept carrés égaux liés de telle sorte



Chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite qui lui est commune avec le carré voisin; le carré 1 ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré 7, et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré 1 est maintenu fixe, il n'y a que le carré 7 qui soit entièrement libre.

(Möbius, N. A., **511**.)

17. On partage les côtés d'un carré en n parties égales; par les points de division, on mène des parallèles aux côtés de manière à partager la figure en n^2 petits carrés. Pour se rendre d'un sommet opposé, on peut suivre plusieurs lignes brisées différentes; parmi tous ces chemins, il y en a qui sont minimums et égaux entre eux; on propose d'en trouver le nombre.

(J.-C. Dupain, N. A., **765**.)

(*Gayou*, **67**, 182.)

18. Démontrer que, si X_n^m désigne le nombre de manières de

décomposer un polygone convexe, de m côtés en n parties, au moyen de $n-1$ diagonales qui ne se coupent pas dans l'intérieur du polygone, on a

$$X_n^m = \frac{1}{n} \times \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-1)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

(Prouhet, N. A., 774.)

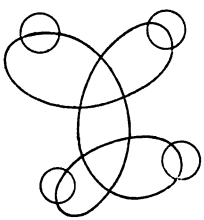
19. Si n femmes sont placées dans un ordre déterminé autour d'une table ronde, de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer à cette table en satisfaisant aux conditions suivantes : un homme se trouve toujours entre deux femmes et n'est jamais à côté de la sienne.

(Permutations circulaires discontiguës.)

(Ed. Lucas, M., 699.)

20. Étant donné un carré, démontrer *rigoureusement* qu'il ne peut pas être partagé en trois parties superposables, autrement que par des parallèles à ses côtés. (H. Laurent, J. E., 531.)

21. Étant donnée une ligne que l'on peut tracer d'un trait non interrompu, telle que celle représentée par la figure ci-dessous,



de combien de manières peut-on la décomposer en d'autres jouissant de la même propriété de pouvoir être tracées d'un trait non interrompu. (H. Laurent, J. E., 532.)

22. ABRACADABRA [1]. — On écrit un mot en triangle, comme il suit, en prenant pour exemple le mot *abracadabra* :

ABRACADABRA
ABRACADABR
ABRACADAB
ABRACADA
ABRACAD
ABRACA
ABRAC
ABRA
ABR
AB
A

Dans ce triangle, les mêmes lettres sont placées sur une même diagonale, et l'on voit qu'en partant d'une ligne quelconque on peut lire le mot de gauche à droite et de bas en haut.

Démontrer que, si l'on part de la première lettre à gauche dans la ligne de rang $(q+1)$ du triangle formé par un mot de $(p+1)$ lettres, le nombre des manières de lire le mot est C_p^q, et que le nombre total, pour toutes les lignes, est 2^p.

(Ed. Lucas, J. S., **164**.)

(*Chapron*, **90**, 92.)

23. De combien de manières peut-on ranger $2n$ nombres inégaux deux à deux, sur deux lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas. (Ed. Lucas, J. S., **177**.)

(*Chapron*, **88**, 46; **89**, 189.)

---

[1] La théorie du triangle arithmétique provient peut-être de l'étude des propriétés de ce triangle cabalistique. (*Note de l'Auteur*.)

24. De combien de manières peut-on ranger $3n$ nombres inégaux deux à deux, sur trois lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas? (Ed. Lucas, J. S., **178**.)

(*Chapron*, **88**, 46; **89**, 238.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT V

Abréviations et renvois VII

Observation spéciale au présent Volume IX

Errata X

ALGÈBRE.

Calcul algébrique.

Numéros.

1-5. — Fractions continues 2

6-10. — Imaginaires 3

11-27. — Déterminants; évaluations, et problèmes 5

28-43. — Déterminants; propriétés 11

44-54. — Analyse combinatoire 17

55-63. — Binome, et coefficients binomiaux 19

64-70. — Développements de puissances ou de produits 22

Dérivées. — Séries. — Limites.

71-81. — Dérivées et différentielles 24

82-91. — Séries numériques 28

92-102. — Séries; sommations 30

103-110. — Séries; convergence ou divergence 34

111-115. — Séries récurrentes 36

116-129. — Séries; propriétés, et questions diverses 38

130-142. — Questions de limites; formules et propriétés 42

143-151. — Questions de limites; problèmes 45

152-165. — Nombres de Bernoulli et d'Euler, et nombres analogues 48

Équations.

166-176. — Théorèmes généraux. Propriétés de polynomes algébriques 52

Numéros. Pages.
177-193. — Équations du 3e degré 55
194-204. — Équations du 4e degré; résolutions, et problèmes 60
205-218. — Équations du 4e degré; propriétés 63
219-228. — Équations du 5e degré 68
229-238. — Équations du 6e au 8e degré 71
239-246. — Équations particulières à résoudre 74
247-264. — Équations dont toutes les racines sont réelles 76
265-272. — Équations dont toutes les racines sont imaginaires 82
273-280. — Équations ayant un nombre limité de racines réelles 85
281-289. — Équations ayant des racines imaginaires 88
290-296. — Racines réelles ou imaginaires. Autres questions 91
297-301. — Formes algébriques. Invariants. Fonctions symétriques 94
302-311. — Transformation des équations 98
312-333. — Équations algébriques. Autres questions 101
334-342. — Équations transcendantes 107
343-355. — Systèmes d'équations; résolutions 109
356-367. — Systèmes d'équations; éliminations, et propriétés 112
368-379. — Divisibilité algébrique 115

Fonctions.

380-390. — Variations des fonctions. Maximums et minimums 118
391-398. — Fonctions satisfaisant à des conditions données 120

Identités et inégalités.

399-409. — Identités; carrés ou sommes de carrés 123
410-420. — Identités; expressions déterminées 126
421-443. — Identités; nombres combinatoires 129
444-469. — Identités; suites terminées, sans variable 135
470-480. — Identités; suites terminées contenant une variable 144
481-489. — Inégalités 147

Problèmes divers.

490-494. — Quantités irrationnelles; approximations 149
495-504. — Autres questions 151

THÉORIE DES NOMBRES.

Numération décimale.

1-9. — Puissances de nombres entiers 155
10-17. — Autres questions 157

Décomposition des nombres en sommes.

Numéros. Pages
18-24. — Sommes de deux carrés 159
25-36. — Sommes de trois carrés 160
37-46. — Sommes de plus de trois carrés 163
47-52. — Sommes de cubes 165
53-60. — Autres décompositions 166

Divisibilité arithmétique.

61-72. — Divisibilité par des nombres donnés 168
73-94. — Divisibilité par des expressions données 171
95-104. — Décomposition des nombres en facteurs 176
105-118. — Diviseurs des nombres 179
119-133. — Nombres premiers entre eux. Codiviseurs. Comultiples .. 182

Nombres premiers.

134-154. — Propriétés de divisibilité 186
155-171. — Autres propriétés 190
172-176. — Problèmes 194
177-192. — Criteriums, formes et répartition des nombres premiers. 195

Analyse indéterminée.

193-201. — Premier degré 199
202-217. — Deuxième degré; équations à résoudre; problèmes 201
218-228. — Deuxième degré; propriétés 206
229-243. — Troisième degré; équations à résoudre; problèmes 210
244-265. — Troisième degré; propriétés 213
266-273. — Quatrième degré; équations à résoudre; problèmes 219
274-289. — Quatrième degré; propriétés 220
290-297. — Cinquième degré 226
298-306. — Degrés supérieurs au cinquième 228
307-325. — Autres équations indéterminées 229

Propriétés de nombres particuliers.

326-338. — Nombres triangulaires 233
339-345. — Triangles ou tétraèdres en nombres entiers 238
346-352. — Nombres de Bernoulli et d'Euler 240

Séries. — Identités. — Questions diverses.

Numéros.		Pages.
353-360.	— Séries arithmétiques	242
361-377.	— Identités et inégalités	244
378-389.	— Questions diverses	250

CALCUL DES PROBABILITÉS.

1-8.	— Tirages au sort et jeux	255
9-16.	— Questions arithmétiques ou algébriques	257
17-24.	— Questions géométriques	259

GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

1-8.	— Damiers et échiquiers; jeux de damiers	261
9-13.	— Carrés magiques et figures analogues	264
14-24.	— Autres questions	266

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

21224 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

F2310 1897
JAN 20 1914

3 2044 079